Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 1

Ellei toisin sanota, kaikissa seuraavissa tehtävissä tarkastellaan symmetristä binääristä kanavaa (BSK) kohinatasolla $0 < f < 1/2$.

1. Osoita, että toistokoodi R_3 vähentää bittivirheen todennäköisyyttä tiedonsiirrossa eli että $p_b < f$ koodia R_3 käytettäessä.

2. Oletetaan, että kanavan vaikutus siirrettävään bittiin ei riipu kanavan läpi aikaisemmin tai myöhemmin kulkevista biteistä. Oletetaan myös, että lähetettävä bitti on yhtä todennäköisesti 0 tai 1. Osoita, että optimaalinen dekooderi käytettäessä toistokoodia R_3 on enemmistöpäätös vastaanotetun kolmen bitin ryhmässä. (Vihje: optimaalinen dekooderi minimoi virheen todennäköisyyden. Bayesin kaavasta on hyötyä.)

3. Olkoon $f = 0.1$. Miten suureksi (osapuilleen) m tulee valita toistokoodissa R_m jos halutaan, että bittivirhe $p_b \approx 10^{-15}$? Oleta, että m on pariton ja arvioi p_b:tä ottamalla luennolla annetussa kaavassa mukaan vain suurin termi. Approksimoi binomikerrointa Stirlingin kaavan avulla,

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

4. Tarkastellaan Hammingin (7,4)-koodia ja olkoon syötettä $\mathbf{s} \in \{0,1\}^4$ vastaava dekoodattu viesti $\hat{\mathbf{s}}$. Osoita, että

$$\mathbb{P}\{\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}\} \approx 21f^2,$$

kun f on pieni.

5. Tarkastellaan edelleen Hammingin (7,4)-koodia. Osoita, että jos kaikki syötteet $\mathbf{s} \in \{0,1\}^4$ ovat yhtä todennäköisiä, saadaan optimaalinen dekooderi minimoimalla syötettä $\mathbf{s}$ vastaavan koodisanan $\mathbf{t}(\mathbf{s})$ ja vastaanotetun bittijonon $\mathbf{r}$ Hammingin etäisyys. Kuten tehtävässä 2, bittien oletetaan kulkevan kanavassa toisistaan riippumattomasti. (Vihje: optimaalinen dekooderi minimoi virhetodennäköisyyden $\mathbb{P}\{\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}\}$.)