Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 10

1. Laske satunnaismuuttujan X differentiaalientropia $H(X)$, kun

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, eli X on eksponenttijakautunut parametrina $\lambda > 0$,

(b) $X = X_1 + X_2$, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ ja $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.

2. Oletetaan, että jatkuvan satunnaismuuttujan differentiaalientropia $H(X)$ on olemassa ja että $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että

(a) $H(X + a) = H(X)$,

(b) $H(aX) = H(X) + \log|a|$, kun $a \neq 0$.

(Vihje: muodosta ensin satunnaismuuttujien $X + a$ ja aX tiheysfunktiot X:n tiheysfunktion avulla.)

3. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$ ja tarkastellaan satunnaisvektoria (X, Y), jonka tiheysfunktio on

$$p(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{kun } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{kun } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

(a) Laske $H(Y|X = x)$, kun $x \in \mathbb{R}$.

(b) Laske $H(Y|X)$.

Seuraavassa kahdessa tehtävässä osoitetaan, että joillain satunnaismuuttujilla voi differentiaalientropian lauseke $H(X) = -\int p(x) \log p(x) dx$ saada myös arvot $\pm\infty$.

4. Keksi esimerkki tiheysfunktiosta $p(x)$, jolle

$$-\int p(x) \log p(x) dx = \infty.$$

5. Keksi esimerkki tiheysfunktiosta $p(x)$, jolle

$$-\int p(x) \log p(x) dx = -\infty.$$