Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 11

1. Seuraavaa tulosta voit hyödyntää useissa tämän harjoituksen tehtävissä. Voit käyttä tulosta vaikka et osaisikaan sitä todistaa.

Olkoon X^n jatkuva satunnaisvektori, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarinen bijektio ja $Y^n = AX^n$. Osoita, että jos X^n:llä on tiheysfunktio $p(x^n)$, niin Y^n:llä on tiheysfunktio $q(y^n)$,

$$q(y^n) = \frac{1}{|\det(A)|} p(A^{-1}y^n),$$

missä $\det(A)$ on A:ta vastaavan matriisin determinantti. (Vihje: lähde liikeelle seuraavasti:

$$\mathbb{P}\{Y^n \in B\} = \mathbb{P}\{AX^n \in B\} = \mathbb{P}\{X^n \in A^{-1}B\}$$

ja kirjoita viimeinen todennäköisyys X^n:n tiheysfunktion $p(x^n)$ integraalin avulla. Tee sitten muuttujien vaihdos integraalissa saadaksesi integroimisjoukoksi B.)

2. Olkoon $X^n \sim p(x^n)$ jatkuva satunnaisvektori, jolla on olemassa differentiaalientropia $H(X^n)$. Todista seuraavat edellisten harjoitusten tehtävän 2 yleistykset:

(a) $H(X^n + a^n) = H(X^n)$, kun $a^n \in \mathbb{R}^n$,

(b) $H(AX^n) = H(X^n) + \log|\det(A)|$, kun A on lineaarinen bijektio.

(Vihje: Satunnaisvektorin $X^n + a^n$ tiheysfunktio on helppo muodostaa $p(x^n)$:n avulla. Satunnaisvektorin AX^n tiheysfunktion puolestaan saat edellisestä tehtävästä.)

3. Olkoon $X^n \sim \mathrm{N}(\mu^n, K)$. Osoita, että

$$H(X^n) = \frac{1}{2}\log[(2\pi e)^n \det(K)].$$

4. Tässä tehtävässä yleistetään lause 6.3 n-ulotteiseen tilanteeseen. Olkoon $X^n \sim p(x^n)$ jatkuva satunnaisvektori, jolla on olemassa differentiaalientropia $H(X^n)$ ja positiivisesti definiitti kovarianssimatriisi $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että

$$H(X^n) \le \frac{1}{2}\log[(2\pi e)^n \det(K)]$$

ja että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $X^n \sim \mathrm{N}(\mu^n, K)$, $\mu^n = \mathbb{E}(X^n)$. (Vihje: Voit olettaa tunnetuksi, että lause 6.2 pätee myös n-ulotteisessa tapauksessa.)

5. Olkoot X ja Z riippumattomia jatkuvia satunnaismuuttujia ja $Y = X + Z$. Osoita, että $H(Y|X) = H(Z)$. Voit olettaa, että kaikki tarvittavat integraalit ovat olemassa.