Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 12

1. Olkoon $X : \Omega \to \mathcal{X}$ diskreetti satunnaismuuttuja ja $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva satunnaismuuttuja. Osoita, että Y:n tiheysfunktio on

$$p(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)p(y|x).$$

(Vihje: Osoita, että $\int_B p(y)dy = \mathbb{P}\{Y \in B\}$, kun $B \subset \mathbb{R}$.)

2. Olkoot X ja Y kuten tehtävässä 1. Osoita, että ehdollistaminen vähentää differentiaalientoropiaa eli että

$$H(Y|X) \leq H(Y)$$

ja että yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos X ja Y ovat riippumattomat. (Vihje: Lähde siitä, että kaavan (6.4) nojalla kaikilla $x \in \mathcal{X}$ on $D(p(y|x)||p(y)) \geq 0$.)

3. Olkoot X ja Y kuten tehtävässä 1. Osoita, että

$$H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X).$$

4. Olkoot $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Osoita, että

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(1 + a_i) \leq \log(1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i).$$

(Vihje: lause 2.8)

5. Olkoot X ja Y kuten tehtävässä 1 ja $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $p(0) = 3/4$, $p(1) = 1/4$ sekä $p(y|0) \sim \mathrm{N}(0, 1/4)$, $p(y|1) \sim \mathrm{N}(1, 1/16)$.

(a) Hahmottele funktioiden $y \mapsto p(y|x)$ kuvaajat, kun $x = 0$ ja $x = 1$.

(b) Määrää tiheysfunktio $p(y)$ ja hahmottele sen kuvaaja (vrt. tehtävä 1).

(c) Laske $H(Y|X)$.

(d) Muodosta posterioritodennäköisyyden $p(x|y)$ lauseke, kun $x = 0$ ja $x = 1$ ja hahmottele funktioiden $y \mapsto p(x|y)$ kuvaajat.