Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 13

1. Osoita, että funktiot

$$e_n(t) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \sqrt{2}\cos(2\pi kt), & n = 2k, \\ \sqrt{2}\sin(2\pi kt), & n = 2k+1, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}_+$, muodostavat avaruuden $L^2([0,1])$ ortonormaalin jonon (e_n).

2. Kuten luennolla mainittiin, voidaan itseasiassa osoittaa, että edellisen tehtävän funktiot e_n ovat avaruuden $L^2([0,1])$ ortonormaali kanta. Muodosta funktiolle $x(t) = t$, $t \in [0,1]$ kehitelmä

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

laskemalla kertoimet

$$\langle x, e_n \rangle = \int_0^1 x(t) e_n(t) dt.$$

Jos käytössäsi on jokin sopiva matemaattinen ohjelmisto, piirrä myös osasumman

$$\sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle \, e_n(t), \qquad t \in [0,1]$$

kuvaaja muutamilla m:n arvoilla nähdäksesi, että konvergenssia todella tapahtuu, kun m kasvaa.

3. Osoita, että jatkuvien funktioiden avaruus $C([-1,1])$ varustettuna sisätulolla

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) dt, \qquad x, y \in C([-1,1])$$

ei ole Hilbertin avaruus.
(Vihje: tarkastele funktiojonoa

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \le t \le 0, \\ nt, & \text{kun } 0 < t < 1/n, \\ 1, & \text{kun } 1/n \le t \le 1, \end{cases}$$

$n = 2, 3, \ldots$. Osoita, että (x_n) on avaruuden $C([-1,1])$ Cauchyn jono mutta että sillä ei kuitenkaan voi olla raja-arvoa tässä avaruudessa.)

4. Keksi esimerkki Hilbertin avaruuden operaattorista, joka ei ole kompakti.

5. Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus. Todista Schwarzin epäyhtälö

$$|\langle x, y \rangle| \le ||x|| ||y||, \qquad x, y \in V.$$

(Vihje: Olkoon $q(t) = ||tx + y||^2$, $t \in \mathbb{R}$. Totea, että $q(t)$ on t:n toisen asteen polynomi. Koska se on ei-negatiivinen, pätee disrkiminantille epäyhtälö, josta Schwarzin epähtälö helposti seuraa.)