Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 14

Olkoon $(X(t))_{t\in[0,1]}$ stokastinen prosessi, jolle $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja jonka kovarianssifunktio on $R(t,\tau) = \min(t,\tau)$, $(t,\tau) \in [0,1]\times[0,1]$. Seuraavissa tehtävissä konstruoidaan vaiheittain prosessin $(X(t))$ Karhusen-Loèven kehitelmä. Voit tehtävää $i+1$ ratkaistaessasi olettaa tehtävän i tulokset tunnetuksi vaikka et olisikaan osannut niitä johtaa.

1. Osoita, että kovarianssifunktio R on jatkuva.

2. Kovarianssifunktioon R liittyvän integraalioperaattorin $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ ominaisarvoa a vastaava ominaisfunktio e toteuttaa yhtälön

$$(Ae)(t) = \int_0^1 R(t,\tau)e(\tau)d\tau = ae(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{1}$$

Osoita, että kun $a \neq 0$, on e on välttämättä jatkuva.
(Vihje: Arvioi suuretta $|(Ae)(t)-(Ae)(t_0)|$ avaruudessa $L^2([0,1])$ pätevän Schwarzin epäyhtälön avulla ja hyödynnä sitten funktion R jatkuvuutta.)

3. Osoita, että ominaisarvoa $a \neq 0$ vastaava ominaisfunktio e on itseasiassa kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja että se toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$ae''(t) + e(t) = 0, \qquad t \in [0,1]. \tag{2}$$

(Vihje: Kirjoita kaavan (1) integraali kahden integraalin summana, joista ensimmäisessä integroidaan 0:sta t:hen ja toisessa t:stä 1:een. Nyt derivaattoja on helpompi tutkia.)

4.

(i) Etsi yhtälön (2) yleinen ratkaisu.

(ii) Osoita, että ominaisfunktion e täytyy toteuttaa ehto $e(0) = e'(1) = 0$.

(iii) Päättele kohtien (i) ja (ii) avulla, että operaattorin A (kaava (1)) nollasta eroavat ominaisarvot ovat

$$a_k = \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}$$

ja niitä vastaavat ortonormaalit ominaisfuktiot

$$e_k(t) = \sqrt{2}\sin[(k-\frac{1}{2})\pi t], \qquad t \in [0,1],$$

$k \in \mathbb{N}_+$.

5.

(i) Muodosta prosessin $(X(t))$ Karhusen-Loéven-kehitelmä ja kirjoita se muotoon

$$X(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty} Z_k^* \frac{\sin[(k-\frac{1}{2})\pi t]}{(k-\frac{1}{2})\pi}, \tag{3}$$

missä $\mathbb{E}[Z_k^* Z_\ell^*] = \delta_{k\ell},\ k,\ell \in \mathbb{N}_+$.

(*ii*) Kun $(X(t))$ on Gaussin prosessi, on kyseessä ns. *Brownin liike*. Tällöin $Z_1^*, Z_2^*, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$ ja voidaan osoittaa, että (3) suppenee tasaisesti todennäköisyydellä 1. Siten, todennäköisyydellä 1, prosessin polut $t \mapsto X(t,\omega)$, $t \in [0,1]$, ovat jatkuvia funkioita. Simuloi tällaisia polkuja tietokoneella käyttämällä (3):lle esimerkiksi likiarvoa

$$X(t) \approx \sqrt{2} \sum_{k=1}^{500} Z_k^* \frac{\sin[(k-\frac{1}{2})\pi t]}{(k-\frac{1}{2})\pi}$$

ja satunnaisotoksia $Z_1^*, \ldots, Z_{500}^* \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$.