Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 2

1. Symmetristä lanttia heitetään kunnes tulee ensimmäinen kruunu. Olkoon X tarvittavien heittojen lukumäärä. Määritellään tämän äärettömän monta eri arvoa $i \in \mathbb{N}_+$ saavan sm:n entropia luonnollisella tavalla,

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i,$$

missä $p_i = \mathbb{P}\{X = i\}$, $i \in \mathbb{N}_+$.

(a) Osoita, että $H(X) = 2$.

(b) Keksi sellainen muotoa "onko $X \in S$?"olevien binääristen kysymysten jono X:n arvon määräämiseksi, jolle odotettavissa oleva tarvittavien kysymysten lukumäärä on $H(X)$.

(c) Mikä on $H(X)$, jos heitetäänkin epäsymmetristä lanttia, jolle $\mathbb{P}\{\text{"kruuna"}\} = p$?

(Vihje: geometrinen jakauma.)

2. Olkoon satunnaismuuttujan X arvojoukko $\mathcal{X}$, $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ja $Y = g(X)$. Osoita, että $H(Y) \leq H(X)$ ja että $H(Y) = H(X)$ jos ja vain jos g on injektio todennäköisyydellä 1 (määrittele mitä tämä tarkoittaa!).

3. Osoita, että $H(X|X) = 0$. Tee tämä suoraan vetoamatta seuraavan harjoitustehtävään.

4. Olkoon Y X:n funktio, $Y = g(X)$, missä $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ja $\mathcal{X}$ on X:n arvojoukko. Osoita, että $H(Y|X) = 0$. Sanomme, että Y on X:n funktio todennäköisyydellä 1, jos kaikilla $x \in \mathcal{X}$, joille $p(x) > 0$ on vain yksi arvo $y \in \mathcal{Y}$, jolla $p(x, y) > 0$. Osoita, että $H(Y|X) = 0$ jos ja vain jos Y on X:n funktio todennäköisyydellä 1.

5. Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoita, että

$$H(X) \geq \mathbb{P}\{p(X) \leq \varepsilon\} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

(Vihje: Markovin epäyhtälö, joka todistetaan todennäköisyyslaskennassa.)