

1. Olkoon $(X, Y) \sim p(x, y)$, sekä X :n ja Y :n arvojoukot $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ja

$$p(0, 0) = p(0, 1) = p(1, 1) = \frac{1}{3}, \quad p(1, 0) = 0.$$

Laske suuret $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $H(X, Y)$ ja $I(X; Y)$.

2. Olkoot X ja Y reaaliarvoisia satunnaismuuttujia ja $Z = X + Y$.

(a) Osoita, että $H(Z|X) = H(Y|X)$. Osoita myös, että jos $X \perp Y$, niin $H(Y) \leq H(Z)$ ja $H(X) \leq H(Z)$.

(b) Anna esimerkki tilanteesta, jossa $H(X), H(Y) > H(Z)$.

(c) Milloin $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

3. Todista ehdollinen ketjusääntö satunnaisvektoreille, eli että

$$H(X_1, \dots, X_n | Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{i=1}^n H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1, Y_1, \dots, Y_m).$$

4. Määritellään satunnaisvektoreiden (X_1, \dots, X_n) ja (Y_1, \dots, Y_m) ehdollinen keskinäisinformaatio ehdolla (Z_1, \dots, Z_k) kaavalla

$$I(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_m | Z_1, \dots, Z_k) = H(X_1, \dots, X_n | Z_1, \dots, Z_k) - H(X_1, \dots, X_n | Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_k).$$

Todista keskinäisinformaation ketjusääntö

$$I(X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y_1, \dots, Y_m | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_1).$$

5. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X , jonka arvojoukko on \mathbb{N} ja jolle edellisten harjoitusten tehtävän 1 tapaan määritelty entropia

$$H(X) = - \sum_{i=0}^{\infty} p_i \log p_i,$$

$p_i = \mathbb{P}\{X = i\}$, $i \in \mathbb{N}$, on äärellinen. Jos $A > 0$ on kiinteä, mikä X :n jakauma $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ maksimoi entropian ehdolla, että X :n odotusarvolle pätee

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = A?$$

(Vihje: Ota $q_i = \alpha \beta^i$, $i \in \mathbb{N}$, missä $\alpha, \beta > 0$ ovat sopivia ja osoita lauseen 2.8 avulla, että $H(X) \leq - \sum_{i=0}^{\infty} p_i \log q_i$.)