Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 4

1. Olkoon satunnaismuuttujan X arvojoukko $\mathcal{X} = \{2, 3, 4\}$ ja $p(2) = 1/2$, $p(3) = 1/3$, $p(4) = 1/6$. Olkoot $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} p(x)$. Mitä voit sanoa raja-arvosta

$$\lim_{n\to\infty} (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}?$$

(Vihje: logaritmista on hyötyä.)

2. Olkoot $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} p(x)$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} [p(X_1, \ldots, X_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

Laske sitten tämä raja-arvo tehtävän 1 jakaumalle.

3. Informaatiolähde lähettää riippumattomia bittejä todennäköisyyksillä $p(0) = 0.995$, $p(1) = 0.005$. Viesti binäärikoodataan 100:n bitin lohkoissa siten, että koodisana annetaan vain sellaiselle lohkolle, jossa on korkeintaan 3 ykköstä.

(a) Jos kaikki koodisanat ovat saman pituisia, mikä on niiden vähimmäispituus kun halutaan, että kaikilla korkeintaan 3 ykköstä sisältävillä lohkoilla on omat erilaiset koodisanansa?

(b) Millä todennäköisyydellä esiintyy lohko, jolle ei ole määrätty koodisanaa?

(c) Johda todennäköisyyslaskennasta tutun Tšebyševin epäyhtälön avulla yläraja sellaisen lohkon esiintymistodennäköisyydelle, jolle ei ole määrätty koodisanaa. Vertaa saamaasi ylärajaa edellisen kohdan tarkkaan tulokseen.

4. Olkoon $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} p(x, y)$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{p(X^n)p(Y^n)}{p(X^n, Y^n)}.$$

5. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X, jonka arvojoukko on $\mathcal{X}$. Olkoon $0 < \varepsilon < 1/2$, $B \subset \mathcal{X}^n$ ja $\mathbb{P}\{X^n \in B\} \geq 1 - \varepsilon$. Osoita, että

$$\frac{1}{n} \log |B| \geq H(X) - 2\varepsilon,$$

kun n on riittävän suuri. (Vihje: Osoita ensin, että missä tahansa todennäköisyysavaruudessa pätee, että jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \geq 1 - \varepsilon$, niin $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1 - 2\varepsilon$. Lähde sitten liikkelle tästä epäyhtälöstä ja hyödynnä tyypillistä joukkoa.)