Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 5

1. Olkoon μ (aikahomogeenisen) Markovin ketjun (X_n) tasapainojakauma ja $X_1 \sim \mu$. Osoita, että ketju on stationaarinen. (Vihje: Todista ensin "ketjusääntö" $p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\cdots p(x_n|x_{n-1})$.)

2. Olkoon $0 < \alpha, \beta < 1$ ja tarkastellaan Markovin ketjua, jonka siirtymämatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Osoita, että ketjun tasapainojakuma on

$$\mu = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right).$$

Oleta sitten, että $X_1 \sim \mu$ ja määrää entropia $H(X_n)$, kun $n \in \mathbb{N}_+$.

3. Laske edellisen tehtävän prosessille entropian kasvunopeus $H(\mathcal{X})$, kun $X_1 \sim \mu$ ja μ on edellisessä tehtävässä johdettu tasapainojakauma. Voit käyttää edellisessä tehtävässä annettua μ:n lauseketta vaikka et olisi onnistunutkaan sitä johtamaan. (Vihje: suure $H'(\mathcal{X})$ on nyt helpompi laskea kuin $H(\mathcal{X})$, joten tehtävän 1 tulos vähentää työtäsi huomattavasti.)

4. Esitä omat esimerkit seuraavanlaisista koodeista C:

(a) C on yksikäsitteisesti dekoodattavissa (yd) mutta ei välitön.

(b) C on ei-singulaarinen mutta ei yksikäsiteisesti dekoodattavissa.

(c) C ei ole ei-singulaarinen (eli on singulaarinen).

5. Olkoon $X \sim p(x)$ ja $p(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathcal{X}$. Olkoon $L(C)$ koodin C keskimääräinen pituus,

$$L(C) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)\ell(x),$$

missä $\ell(x)$ on symbolin x koodisanan pituus. Osoita, että on olemassa keskimäärin lyhin välitön koodi, eli välitön koodi C^*, jolle

$$L(C^*) = \min\{L(C) | C \text{ on välitön koodi}\}.$$

Onko C^* yksikäsitteinen?