

1. Tarkastellaan kanavaa, jossa $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$ ja jonka kanavamatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

missä $0 < \alpha < 1$. Tämän voi ajatella mallintavan tilannetta, jossa bitti ei vaihdu kanavassa mutta voi sen sijaan hävitä matkalla (vastaanotetaan symboli "2") todennäköisyydellä α . Laske tämän kanavan kapasiteetti.

2. Olkoot satunnaismuuttujat X ja Z riippumattomia ja niiden arvojoukot $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, 10\}$, $\mathcal{Z} = \{1, 2, 3\}$. Oletetaan, että

$$\mathbb{P}\{Z = 1\} = \mathbb{P}\{Z = 2\} = \mathbb{P}\{Z = 3\} = \frac{1}{3}.$$

Tarkastellaan kanavaa, jonka syöte on X ja tuloste

$$Y = X + Z \pmod{11}.$$

Mikä on kanavan kapasiteetti ja millä X :n jakaumalla se saavutetaan?

3. Tarkastellaan binääristä symmetristä kanavaa (BSK) kohinasolla $0 < p < 1$ ja kytketään n tällaista kanavaa peräkkäin siten että kanavan $i - 1$ tuloste on kanavan i syöte:

$$X_0 \rightarrow \boxed{\text{kanava 1}} \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \boxed{\text{kanava } n} \rightarrow X_n. \quad (1)$$

Osoita, että tämä vastaa yhtä BSK:ta, jonka kohinataso on $p_n = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2p)^n]$. Päättele tästä miten kapasiteetille käy, kun $n \rightarrow \infty$. (Vihje: Olkoon X_i :n jakauma $p^i = (p_0^i, p_1^i)$, missä siis $p_0^i = \mathbb{P}\{X_i = 0\}$, $p_1^i = \mathbb{P}\{X_i = 1\}$ ja olkoon BSK:n kanavamatriisi

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p & p \\ p & 1 - p \end{pmatrix}.$$

Kuten Markovin ketjulle, nyt pätee $p^{i+1} = p^i P$. Siten $p^n = p^0 P^n$. Tästä voi päätellä, että P^n on (1):n kanavamatriisi. Loppu menee sitten jo melko helposti!

4. Tarkastellaan ns. Z -kanavaa. Sille $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ja kanavamatriisi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Lasken kanavan kapasiteetti.

5. Tarkastellaan kanavaa, jossa $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ja kanavamatriisi on

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

missä $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha \neq \beta$. Määrä kanavan kapasiteetti.