Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 8

1. Tarkastellaan kanavaa, joka tunnetaan nimellä "kohinainen kirjoituskone" (noisy typewriter). Siinä syötteen X ja tulosteen Y aakkostot ovat $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{\text{A}, \text{B}, \ldots, \text{Ä}, \text{Ö}\}$ (29 kirjainta) ja kanavamatriisi on

$$p(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kun } y = x, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } y = x\text{:stä seuraava kirjain}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

(Tässä ajatellaan syklisesti, eli Ö:stä seuraava kirjain on A.) Määrää kanavan kapasiteetti sekä X:n jakauma $p(x)$, jolla se saavutetaan.

2. Tarkastellaan kanavaa, jonka syöte on X ja tuloste Y,

$$X \to \boxed{p(y|x)} \to Y$$

ja olkoon tämän kanvan kapasiteetti C. Onko mahdollista nostaa kapasiteettia käsittelemällä tulostetta jollain tavoin eli onko mahdollista löytää funktiota g siten että, jos $Z = g(Y)$, niin saadun yhdistetyn kanavan (syöte X, tuloste Z)

$$X \to \boxed{p(y|x)} \to Y \to \boxed{p(z|y)} \to Z$$

kapasiteetti ylittää C:n? (Vihje: osoita epäyhtälö $I(X;Z) \leq I(X;Y)$.)

3. Olkoon kanavavan syöte ja tulosteaakkostot $\mathcal{X} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ja $\mathcal{Y} = \{b_1, b_2, b_3\}$, sekä kanavamatriisi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tässä siis matriisin i:nnen rivin j:s alkio on $p(b_j|a_i)$. Olkoon $p(a_1) = 1/2$, $p(a_2) = p(a_3) = 1/4$. Määrää funktio $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, joka arvaa optimaalisesti syötteen X, kun tuloste on Y, eli siis minimoi virhetodennäköisyyden $\mathbb{P}\{g(Y) \neq X\}$, kun syöte $X \sim p(x)$. Mikä on tämä minimaalinen virhetodennäköisyys? (Vihje: Optimaalinen g on g^*, jolle $g^*(y) = x^*$, kun $p(x^*|y) = \max_x p(x|y)$).

4. Tarkastellaan diskreettiä muistitonta kanavaa, joka lisäksi on hyödytön. Osoita, että syötettä $(X_1, \ldots, X_n)$ vastaavan tulosteen $(Y_1, \ldots, Y_n)$ komponentit Y_i ovat aina riippumattomia, oli syötteen jakauma mikä hyvänsä.

5. Todista luentojen lauseen 5.9 toinen puoli, eli että diskreetille muistittomalle kanavalle aina pätee

(i) $p(y_n|x^n, y^{n-1}) = p(y_n|x_n)$,

(ii) $p(y^{n-k}|x^n) = p(y^{n-k}|x^{n-k})$

kaikilla $x^n \in \mathcal{X}^n$, $y^n \in \mathcal{Y}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, $1 \leq k \leq n-1$.