Oulun yliopisto
Sovelletun matematiikan ja tilastotieteen yksikkö
Informaatioteoria 2016
Harjoitus 9

1. Luennoilla tarkasteltiin satunnaiskooderia $\mathcal{C}_n$, jonka koodisanat ja koodisanojen komponentit valitaan satunnaisesti ja toisistaan riippumatta syöteaakkostosta $\mathcal{X}$ jonkin jakauman $p(x)$ mukaan. Suurilla n mahdollisia koodereita on epäilemättä paljon mutta kuinka monta niitä itse asiassa on? Kuten tavallista, oletetaan että koodattavia viestejä on $M_n = \lceil 2^{nR} \rceil$ kappaletta.

2. Informaatioteorian peruslauseen todistus nojaa AEP:hen (esim. kaava (5.15)), josta luennoilla todistettu versio (lause 5.15) olettaa, että $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \overset{\text{iid}}{\sim} p(x, y)$. Osoita, että tämä ehto on informaatioteorian peruslauseen todistuksessa voimassa, eli että jos diskreetissä muistittomassa kanavassa $X^n \sim p(x^n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$ (ja nyt oikealla puolella p on sama kaikilla i), niin $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \overset{\text{iid}}{\sim} p(x, y)$.

3. Edellistä tehtävää ratkaistaessasi ehkä huomasit, että kun vaan diskreetin muistittoman kanavan syötteen X^n komponentit $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomat (eikä välttämättä samoin jakautuneita), niin myös syöte-tuloste parit $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ ovat automaattisesti riippumattomia. Siten tässä tilanteessa myös tulosteet $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia. Osoita esimerkillä, että tulosteet voivat kuitenkin olla riippumattomia vaikka syötteet eivät sitä olisikaan.

4. Todista seuraava informaatioteorian peruslauseen todistuksessa (kaava (5.19)) tarvittu tulos: jos X, Y ja Z ovat satunnaismuuttujia joille $X = g(Z)$ jollain funktiolla g ja

$$\mathbb{P}\{Y = y | Z = z\} = \mathbb{P}\{Y = y | X = g(z)\},$$

niin

$$I(Z; Y) \leq I(X; Y).$$

(Vihje: sama idea kuin edellisten harjoitusten tehtävässä 2 toimii tässäkin.)

5. Informaatioteorian peruslauseen todistuksessa käytettiin satunnaiskoodereita ja niihin liittyviä yhteistyypillisyyteen perustuvia dekoodereita, koska tämä mahdollisti melko helpon matemaattisen analyysin. Kullakin n, optimaalinen koodi (C_n^*, g_n^*) valittiin minimoimalla koodisanojen keskimääräinen virhe $\bar{\lambda}(C_n)$ kooderin C_n suhteen. Kuten luvusta 5.5 tiedetään, on tämä ekvivalenttia virhetodennäköisyyden $\mathbb{P}\{g_n(Y^n) \neq J_n\}$ minimoinnin kanssa, kun satunnainen viesti J_n valitaan tasaisen jakauman mukaan. Jos viestien jakaumasta ei oleteta mitään, ei tämä koodi tietenkään ole välttämättä optimaalinen siinä mielessä, että se minimoisi virheen todennäköisyyden. Osoita, että kun koodisanat on kiinnitetty, optimaalinen dekooderi on $g_n^* : \mathcal{Y}^n \to \{1, \ldots, M_n\}$, $g_n^*(y^n) = \hat{j}$, missä

$$\max_{j=1,\ldots,M_n} \mathbb{P}\{J_n = j | Y^n = y^n\} = \mathbb{P}\{J_n = \hat{j} | Y^n = y^n\}.$$

Vihje: asiaan voi perehtyä luentomonisteen avulla.