

1. Esimerkki 'käytännön' todennäköisyysjakaumista:

a) oletetaan että lampun käyttöikä noudattaa eksponenttijakaumaa,

$$f(z) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda z) & z > 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Merkitään keskimääräistä käyttöikää tunneissa $\bar{z}$

Mikä on todennäköisyys että lamppu kestää yli $\bar{z}$ tuntia? (vastaus 0.368)

- Tarkistetaan tiheysjakauman normeeraus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \int_0^{\infty} -e^{-\lambda z} = -(0 - 1) = 1$$

- Keskiarvo

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz = \int_0^{\infty} z \lambda e^{-\lambda z} dz \quad (\text{sijoita } x = \lambda z) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \end{aligned}$$

Sovelletaan osittaisintegroitua:

$$\int g f' = g f - \int g' f$$

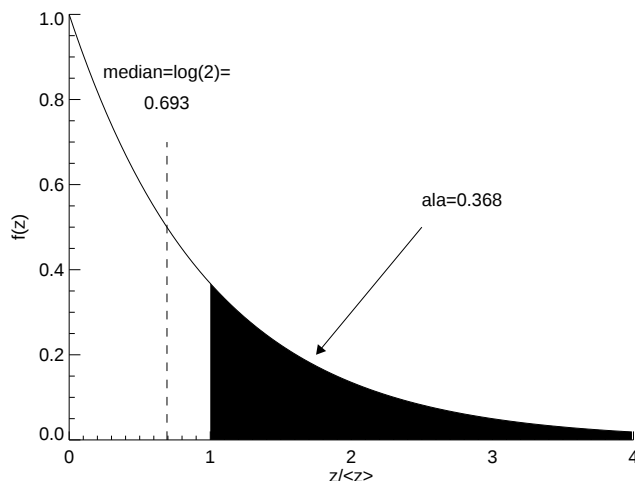
$$\begin{aligned} f' &= e^{-x} \Rightarrow f = -e^{-x} \\ g &= x \Rightarrow g' = 1 \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{\infty} -x e^{-x} - \int_0^{\infty} -e^{-x} dx \right) = \frac{1}{\lambda} \left(0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right) = \frac{1}{\lambda} (-(0 - 1)) = \frac{1}{\lambda}$$

- Kysytty todennäköisyys:

$$P(z > a) = \int_a^{\infty} f(z) dz = \int_a^{\infty} -e^{-\lambda z} = e^{-\lambda a}$$

Valitaan $a = \bar{z} = 1/\lambda \Rightarrow P(z > \bar{z}) = e^{-1} = 0.368$



b) Mikä on todennäköisyys sille, että kahden lampun yhteenlaskettu käyttöikä on suurempi kuin $2\bar{z}$ tuntia? (vastaus 0.406)

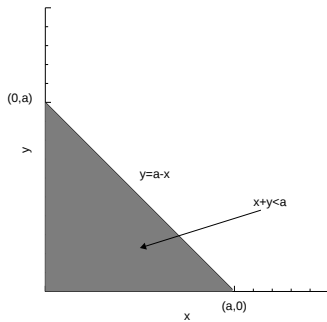
Merkitään käyttöikä x ja y , ja koska x ja y riippumattomia $\Rightarrow$

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \begin{cases} \lambda^2 \exp(-\lambda x - \lambda y) & x > 0 \text{ ja } y > 0 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

- Mikä on $P(x + y > a)$?

Nyt $y + x = a \Rightarrow y = a - x$

$$P(x + y > a) = 1 - \underbrace{P(x + y < a)}_{=I}$$



$$\begin{aligned} I &= \int \int_{x+y < a} f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{a-x} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \lambda^2 \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{a-x} e^{-\lambda x - \lambda y} dy \right] dx = \lambda^2 \int_{x=0}^a e^{-\lambda x} \left[\int_{y=0}^{a-x} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right] dx \\ &= -\lambda \int_{x=0}^a e^{-\lambda x} (e^{-\lambda(a-x)} - 1) dx = \dots = 1 - (a\lambda + 1)e^{-\lambda a} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$P(x + y > a) = (a\lambda + 1)e^{-\lambda a}$$

Kysytty $P(x + y > 2\bar{z}) = P(x + y > 2/\lambda) = 3e^{-2} = 0.406$

2. Johda tasaisen jakauman keskiarvo ja keskihajonta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Keskiarvo:

$$\mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Varianssi:

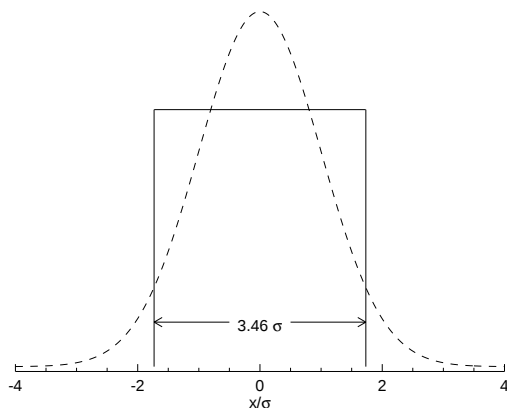
$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2\bar{x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{\bar{x}} + \bar{x}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \bar{x}^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^b - \bar{x}^2 = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{b^2 + a^2 + ba}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \\ &= \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Riippumatta sijainnista: tasainen jakauma yli intervallin L : keskihajonta $\sigma = \frac{L}{\sqrt{12}}$

Sama keskihajonta



3. Osoita, että binomijakauman $p(V; N, p)$ keskiarvo $\mu = pN$ ja varianssi $\sigma^2 = p(1-p)N$

Binomijakauma:

$$p(V; N, p) = \frac{N!}{V!(N-V)!} p^V (1-p)^{N-V} \quad V = 0, 1, \dots, N$$

• Keskiarvo:

$$\mu = \sum_{V=0}^N V p(V) = \sum_{V=0}^N V \binom{N}{V} p^V (1-p)^{N-V}$$

Nyt (voimassa kun $1 \leq V \leq N$)

$$V \binom{N}{V} = \frac{VN!}{V!(N-V)!} = \frac{N(N-1)!}{(V-1)!(N-V)!} = N \binom{N-1}{V-1}$$

$\Rightarrow$

$$\mu = N \sum_{V=1}^N \binom{N-1}{V-1} p^V (1-p)^{N-V}$$

Sijoitetaan:

$v = V - 1$ ja $n = N - 1$

jolloin $p^V = pp^v$ ja $N - V = n - v \Rightarrow$

$$\mu = Np \underbrace{\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} p^v (1-p)^{n-v}}_1 = Np$$

Binomijakauman keskiarvo $\boxed{\mu = Np}$

[Normeeraus: Binomikehitelmä kaikille q, p :

$$(q+p)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \dots + \binom{n}{i} q^{n-i} p^i + \dots + \binom{n}{n} p^n$$

Sovelletaan tapaukseen $q = 1 - p$]

- varianssi:

$$\sigma^2 = \sum_{V=0}^N V^2 p(V) - \mu^2 = \sum_{V=0}^N V^2 \binom{N}{V} p^V (1-p)^{N-V} - (Np)^2$$

Nyt

$$\begin{aligned} V^2 \binom{N}{V} &= V N \binom{N-1}{V-1} = (V-1)N \binom{N-1}{V-1} + N \binom{N-1}{V-1} \\ &= \underbrace{(N-1)N \binom{N-2}{V-2}}_{\text{voimassa } V \geq 2} + \underbrace{N \binom{N-1}{V-1}}_{\text{voimassa } V \geq 1} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (N-1)N \underbrace{\sum_{V=2}^N \binom{N-2}{V-2} p^V (1-p)^{N-V}}_{p^2 \cdot 1} + N \underbrace{\sum_{V=1}^N \binom{N-1}{V-1} p^V (1-p)^{N-V}}_{p \cdot 1} - (Np)^2 \\ &= (N-1)Np^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p) \end{aligned}$$

Binomijakauman keskihajonta $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$

4. Osoita, että Poisson-jakauman $p(x, \lambda)$ keskiarvo $\mu = \lambda$ ja varianssi $\sigma^2 = \lambda$

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- keskiarvo:

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}}_{\text{siis } y=x-1} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

$\Rightarrow$ Poisson jakauman keskiarvo $\boxed{\mu = \lambda}$

- varianssi.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{x(x-1)} + \bar{x} - \bar{x}^2$$

Nyt

$$\overline{x(x-1)} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{x-2}}{(x-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \overline{x(x-1)} + \bar{x} - \bar{x}^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$\Rightarrow$ Poisson jakauman keskihajonta $\boxed{\sigma = \sqrt{\lambda}}$

5. Gaussinen jakauma. Osoita, että keskiarvo $= \mu$ ja varianssi $= \sigma^2$. Johda kaava puolivarvoisuuden FWHM ja keskihajonnan σ välillä.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]$$

- Osoitetaan että normeerattu oikein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]}_{\text{siis } y=(x-\mu)/\sigma} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy = I_{\text{norm}}$$

Lasketaan I_{norm} seuraavalla 'tempulla': pintaintegraali

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = I_{\text{norm}}^2$$

Toisaalta sama pintaintegraali voidaan kirjoittaa napakoordinaateissa

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\phi = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_{r=0}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}r^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

$\Rightarrow$

$$I_{\text{norm}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy = 1$$

- Keskiarvo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right]}_{\text{siis } x=\sigma y+\mu} dx \\ &= \sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy}_{=0 \text{ pariton funktio}} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy}_{=1} \end{aligned}$$

Eli $\bar{x} = \mu$

- Varianssi:

$$var = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{(x - \bar{x})^2}^{\sigma^2 y^2} p(x) dx = \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

Sovelletaan osittaisintegrointia:

$$\int g f' = \int g f - \int g' f$$

Nyt

$$\begin{aligned} f' &= -y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \Rightarrow f = \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ g &= -y \Rightarrow g' = -1 \end{aligned}$$

Joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} -y \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy}_0 + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy}_{\sqrt{2\pi} I_{norm}} = \sqrt{2\pi}$$

$$\Rightarrow \text{haluttu tulos } var = \sigma^2$$

Puoliarvoleveys FWHM lasketaan kaavasta (symmetrinen funktio)

$$p\left(\mu + \frac{1}{2}FWHM\right) = \frac{1}{2}p(\mu)$$

Eli Gaussin funktiolle

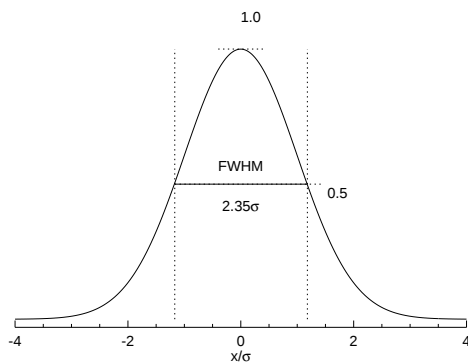
$$\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}FWHM}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \exp(0)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}FWHM}{\sigma}\right)^2 = \log 2$$

$$\frac{FWHM}{\sigma} = 2 \sqrt{2 \log 2} = 2.35482$$

Gaussin jakaumalle $FWHM = 2.35\sigma$

Gaussisen jakauman FWHM



6. Gaussinen jakauma saadaan Binomijakauman raja-arvona kun $N \rightarrow \infty$. Perustele tämä keskeisen raja-arvolauseen avulla.

- Binomijakauman satunnaismuuttuja V koostuu N :n riippumattoman satunnaismuuttujan X_i summasta. Kukin näistä riippumattomista satunnaismuuttujista X_i saa arvon 1 onnistuneessa kokeessa (tn p) ja 0 epäonnistuneessa (tn $(1 - p)$). Merkitään

$$V = X_s = \sum_i^N X_i$$

jossa kukin X_i noudattaa tiheysfunktioita

$$f(x = 0) = 1 - p$$

$$f(x = 1) = p$$

Keskeisen raja-arvolauseen nojalla samasta jakaumasta otettujen satunnaismuuttujien (nyt X_i) summan X_s tiheysfunktio lähestyy Gaussista jakaumaa yhteenlaskettavien lukumäärän kasvaessa. Saa-dun Gaussisen jakauman keskiarvo $\mu = N\mu_x$ ja varianssi $\sigma^2 = N\sigma_x^2$, jossa μ_x ja σ_x^2 ovat X_i jakauman keskiarvo ja varianssi.

Lasketaan

$$\mu_x = \sum_{j=0}^1 j f(j) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=0}^1 j^2 f(j) - \mu_x^2 = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1 - p)$$

Siten binomijakauman muuttujan V tiheysfunktio lähestyy Gaussista jakaumaa jonka $\mu = Np$ ja varianssi $Np(1 - p)$

[Luennoissa *Keskeinen raja-arvolause* lausuttiin satunnaismuuttujien summan sijasta niiden keskiarvolle $X_k = X_s/N$. Tälläin X_k lähenee Gaussista jakaumaa jonka keskiarvo $\mu = p$ ja varianssi $p(1 - p)/N$ (helppo todeta varianssin yleisten ominaisuuksien perusteella: $\text{var}(X_k) = \text{var}(X_s/N) = 1/N^2 \text{var}(X_s)$]

- Sovelletaan: Laske tuloksen perusteella approksimaatio binomitodennäköisyydelle

$V = 1500, N = 3000, p = 0.5$

Nyt $\mu = pN = 1500, \sigma = \sqrt{Np(1 - p)} = 27.3861$

$$\begin{aligned} p(V; N, p) &\approx \int_{x=V-0.5}^{V+0.5} f_{\text{Gaussian}}(\mu; \sigma) dx = \int_{y=\frac{V-0.5-\mu}{\sigma}}^{\frac{V+0.5-\mu}{\sigma}} f_{\text{Gaussian}}(0; 1) dy \\ &= \Phi\left(\frac{V+0.5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{V-0.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(0.0182574) - \Phi(-0.0182574) = 0.507283 - 0.492717 \\ &= 0.0145665 \end{aligned}$$

7. Lorentz-jakauma voidaan määritellä lausekkeella

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2 + B^2}$$

Johda vakioiden A, B, x_0 lausekkeet keskiarvon ja puoliarvoväyden avulla. Osoita että varianssi divergoi - mitä tämä merkitsee käytännössä?

- Normeeraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{A}{(x - x_0)^2 + B^2}}_{\text{sijoitus } y=(x-x_0)/B} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{B} \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{A}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \arctan y = \frac{A}{B} [\pi/2 - (-\pi/2)] = \pi \frac{A}{B}$$

$$\text{Eli oltava } \pi \frac{A}{B} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = B/\pi$$

- Keskiarvo:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ax}{(x - x_0)^2 + B^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + B^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ax_0}{(x - x_0)^2 + B^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \log((x - x_0)^2 + B^2) + \pi \frac{Ax_0}{B} = x_0 \end{aligned}$$

Varianssi

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ax^2}{(x - x_0)^2 + B^2} dx$$

Selvästikin divergoi, koska integroitava funktio lähestyy raja-arvona samaa vakiota kun $x \rightarrow \pm\infty$

- Puoliarvoväys FWHM:

$$f(x = x_0 + \frac{1}{2}FWHM) = \frac{1}{2}f(x = x_0)$$

$$\frac{A}{(FWHM/2)^2 + B^2} = \frac{1}{2} \frac{A}{0 + B^2}$$

$$(FWHM/2)^2 + B^2 = \frac{1}{2}B^2$$

$$FWHM/2 = B$$

Sijoitetaan vakioiden A ja B lausekkeet

$\Rightarrow$ luennoilla annettu lauseke

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{FWHM/2}{(x - x_0)^2 + (FWHM/2)^2}$$

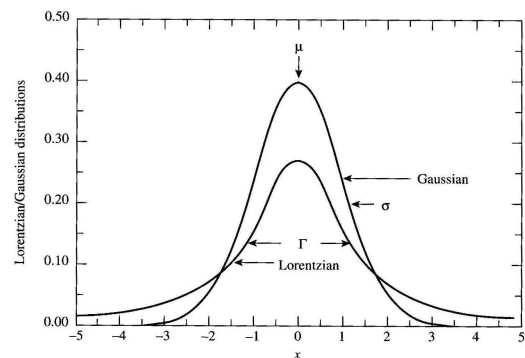


FIGURE 2.6 Comparison of normalized Lorentzian and Gaussian distributions, with $\Gamma = 2.354\sigma$.