Prosessin mallin linearisointi

Enso Ikonen, IMS

March 22, 2020

Linearisointi Taylorin sarjakehitelmän avulla. Oletetaan, että prosessin malli on annettu seuraavasti:

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y(t), u(t))$$

missä f on $y(t)$:n ja $u(t)$:n epälineaarinen funktio, $y(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$. Yksinkertaistetaan notaatiota merkitsemällä $f(y,u) = f(y(t), u(t))$. Muodostetaan funktiolle f Taylorin sarjakehitelmä ja otetaan siitä vain ensimmäisen asteen termit:

$$f(y,u) \approx f(\bar{y},\bar{u}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}|_{\bar{y},\bar{u}}}_{k_y}\underbrace{(y-\bar{y})}_{\Delta y} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}|_{\bar{y},\bar{u}}}_{k_u}\underbrace{(u-\bar{u})}_{\Delta u}$$

missä kertoimet k_y ja k_u saadaan evaluoimalla osittaisderivaatat linearisointipisteessä $(\bar{y},\bar{u})$. Δy ja Δu ovat poikkeamia linearisointipisteestä. Jos linearisointipisteeksi valitaan tasapainotila, $f(\bar{y},\bar{u}) = 0$. Prosessimallin approksimaatio on siis

$$\frac{dy}{dt}(t) = k_y \Delta y(t) + k_u \Delta u(t)$$

mikä on lineaarinen systeemi. Huomataan edelleen, että

$$\frac{d(\Delta y)}{dt}(t) = \frac{d(y-\bar{y})}{dt}(t) = \frac{dy}{dt}(t) - \frac{d\bar{y}}{dt}(t) = \frac{dy}{dt}(t)$$

koska $\bar{y}$ on vakio. Niinpä voidaan kirjoittaa approksimaatio poikkeamille tasapainotilan ympäristössä

$$\frac{d\Delta y}{dt}(t) = k_y \Delta y(t) + k_u \Delta u(t)$$

Laplace muunnetaan ja merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $Y(s) = \mathcal{L}\{\Delta y(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{\Delta u(t)\}$, jolloin

$$sY(s) = k_y Y(s) + k_u U(s)$$

eli siirtofunktioksi pisteen $(\bar{y},\bar{u})$ ympäristössä saadaan

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_u}{s - k_y}$$

Korkeamman kertaluvun järjestelmät voidaan linearisoida kirjoittamalla systeemi tilamalliksi ja linearisoimalla kukin tilamallin rivi vastaavalla tavalla. Voit katsoa lisäinfoa esim täältä: http://myweb.ntut.edu.tw/~jcjeng/Linearization.pdf

Esimerkki. Prosessia kuvaa

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \sqrt{u(t)}$$

Nyt

$$f(y, u) = -y + u^{\frac{1}{2}}$$

jolloin

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

Oletetaan, että linearisointi halutaan tehdä pisteen $(\bar{y}, \bar{u}) = (1, 1)$ ympäristössä. Huomaa, että piste on prosessin tasapainotila, $f(1, 1) = 0$. Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{\bar{y}=1,\bar{u}=1} = -1 = k_y,\ \frac{\partial f}{\partial u}|_{\bar{y}=1,\bar{u}=1} = \frac{1}{2} = k_u$$

Prosessia kuvaavaksi siirtofunktioksi saadaan

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.5}{s+1}$$

missä $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ ja $\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ ovat poikkeamia tasapainopisteen ympäristössä.