Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Funktioiden estimointi
5. harjoitus, viikko 9, 2011

1. Todista lemmassa 3.5 väitetyt suureen $\|\cdot\|_p$ ominaisuudet silloin, kun $p = 1$ tai $p = 2$. (Tapaus $p = 2$: muista Schwarzin epäyhtälö!)

2. Todista lemmassa 3.6 annettu yleistetty Minkowskin epäyhtälö tapauksissa $p = 1$ ja $p = 2$. (Vihjeitä tapausta $p = 2$ varten: Schwarzin epäyhtälö, integrointijärjestyksen vaihto.)

3. Laske luentojen kaavaa (3.17) käyttäen tarkka lauseke suureelle $\mathrm{MISE}[\hat{f}_n(\cdot;h)]$, kun K on Gaussin ydin ja f on normaalijakauman $N(\mu,\sigma^2)$ tiheysfunktio. (Muista 3. harjoituksista normaalijakaumien tiheysfunktioiden kertolaskukaava!)

4. Kaavassa (3.26) on esitetty lauseke suureen $\mathrm{AMISE}[\hat{f}_n(\cdot;h)]$ minimoivalle silotusparametrille h_n^*. Olkoon K Gaussin ydin ja f normaalijakauman $N(\mu,\sigma^2)$ tiheysfunktio. Johda tässä tapauksessa kaava

$$h_n^* = (4/3)^{1/5}\sigma n^{-1/5}.$$

Minkälaiseksi optimaalisen AMISE:n kaava (3.27) supistuu?

5. Nyt vertaamme tietokoneen avulla tehtävässä 3 saatuja tarkkoja tuloksia sekä niille tehtävässä 4 johdettuja asymptoottisia approksimaatioita. Tarkastellaan tilannetta, jossa $n = 50$, f on $N(0,1)$-jakauman tiheys ja K on Gaussin ydin.

Piirrä sopivassa h_n^*:n ympäristössä samaan kuvaan (h:n funktioina) (tarkka) integroitu harha, (tarkka) integroitu varianssi sekä niiden summa, (tarkka) MISE. Piirrä kuvaan vielä edellä mainitun kolmen suureen asymptoottiset approksimaatiot: asymptoottinen integroitu harha, asymptoottinen integroitu varianssi sekä AMISE.