Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Funktioiden estimointi
2. harjoitus, viikko 5, 2014

1. Tarkastelemme parametrista perhettä

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0.$$

(Tasainen jakauma välillä $[0, \theta]$.) Osoita, että parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Laske edellisessä tehtävässä saadun estimaattorin $\hat{\theta}_n$ tiheysfunktio (vihje: kertymäfunktio on helppo laskea), ja johda tuloksen avulla lauseke

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Vertaa tätä tulosta Cramerin-Raon alarajaan (Lause 2.5). Mahtavatko Lauseen 2.5 oletukset olla voimassa?

3. Tarkista, että suurimman uskottavuuden estimaattoria koskevan Lauseen 2.8 oletukset ovat voimassa tiheysfunktioperheelle

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

4. (Schwarzin epäyhtälö.)
Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktioita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx < \infty, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)\,dx < \infty.$$

Osoita oikeaksi Schwarzin epäyhtälö:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)\,dx}$$

lähtemällä liikkeelle ilmeisestä totuudesta

$$0 \leq \int (\lambda f + g)^2, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

kehittämällä summan neliö ja tarkastelemalla saadun λ:n polynomin minimiarvoa. (Huomaa, että $|fg| \leq f^2 + g^2$, minkä takia $|\int fg| \leq \int |fg| < \infty$, ja kaikki kyseisen polynomin kertoimet ovat määriteltyjä.)

5. (Lebesguen integraalin derivointi parametrin suhteen.)
Olkoon $T \subset \mathbb{R}$ avoin joukko, ja olkoon $f : \mathbb{R} \times T \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että

(a) kaikilla $t \in T$ pätee $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|\, dx < \infty$.

(b) kaikilla $x \in \mathbb{R}, t \in T$ on olemassa osittaisderivaatta $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$.

(c) on olemassa ei-negatiivinen funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \right| \leq g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \in T,$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx < \infty.$$

Osoita, että tällöin

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, dx, \quad \forall t \in T.$$

Vihje: todistus onnistuu seuraavilla tiedoilla.

- derivaatan määritelmä raja-arvon avulla
- jos $g : T \to \mathbb{R}$ on funktio ja $t \in T$, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä
  1. $\lim_{\tau \to t} g(\tau) = a$
  2. kaikilla jonoilla (τ_n), joille $\tau_n \in T, \forall n$ ja $\tau_n \neq t, \forall n$ ja $\lim_n \tau_n = t$, pätee $\lim_n g(\tau_n) = a$.
- väliarvolause
- Lebesguen dominoidun konvergenssin lause