

Oulun yliopisto  
Matemaattisten tieteiden laitos  
Funktioiden estimointi  
5. harjoitus, viikko 8, 2014

1. Todista lemmassa 3.5 väitetyt suureen  $\|\cdot\|_p$  ominaisuudet silloin, kun  $p = 1$  tai  $p = 2$ . (Tapaus  $p = 2$ : muista Schwarzin epäyhtälö!)
2. Todista lemmassa 3.6 annettu yleistetty Minkowskin epäyhtälö tapauksissa  $p = 1$  ja  $p = 2$ . (Vihjeitä tapausta  $p = 2$  varten: Schwarzin epäyhtälö, integrointijärjestyksen vaihto.)
3. Laske luentojen kaavaa (3.17) käyttäen tarkka lauseke suurelle  $\text{MISE}[\hat{f}_n(\cdot; h)]$ , kun  $K$  on Gaussin ydin ja  $f$  on normaalijakauman  $N(\mu, \sigma^2)$  tiheysfunktio. (Muista 3. harjoituksista normaalijakaumien tiheysfunktioiden kertolaskukaava!)
4. Kaavassa (3.26) on esitetty lauseke suureen  $\text{AMISE}[\hat{f}_n(\cdot; h)]$  minimoivalle silotusparametrille  $h_n^*$ . Olkoon  $K$  Gaussin ydin ja  $f$  normaalijakauman  $N(\mu, \sigma^2)$  tiheysfunktio. Johda tässä tapauksessa kaava

$$h_n^* = (4/3)^{1/5} \sigma n^{-1/5}.$$

Minkäläiseksi optimaalisen AMISE:n kaava (3.27) supistuu?

5. Nyt vertaamme tietokoneen avulla tehtävässä 3 saatuja tarkkoja tuloksia sekä niille tehtävässä 4 johdettuja asymptoottisia approksimaatioita. Tarkastellaan tilannetta, jossa  $n = 50$ ,  $f$  on  $N(0, 1)$ -jakauman tiheys ja  $K$  on Gaussin ydin.

Piirrä sopivassa  $h_n^*$ :n ympäristössä samaan kuvaan ( $h$ :n funktioina) (tarkka) integroitu harha, (tarkka) integroitu varianssi sekä niiden summa, (tarkka) MISE. Piirrä kuvaan vielä edellä mainitun kolmen suureen asymptoottiset approksimaatiot: asymptoottinen integroitu harha, asymptoottinen integroitu varianssi sekä AMISE.