

Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Tilastollinen hahmontunnistus
2. harjoitus, viikko 4, 2010

1. Todista seuraavat matriisin pseudoinverssin ominaisuudet.

1. Jos A on säännöllinen, niin $A^+ = A^{-1}$.
2. $(A^T)^+ = (A^+)^T$.
3. $A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+$.

2. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$. Osoita, että

1. Jos $k > d$, niin $A A^T$ ei voi olla säännöllinen.
2. Jos $k < d$, niin $A^T A$ ei voi olla säännöllinen.
3. Jos $k = d$, niin $A A^T$ on säännöllinen jos ja vain jos $A^T A$ on säännöllinen.

3. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ sekä X ja Y d -ulotteisia satunnaisvektoreita. Todista odotusarvon lineaarisuusominaisuudet

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
2. $\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X)$.

4. Olkoon X d -ulotteinen satunnaisvektori, jonka odotusarvo on μ ja jonka korrelaatio- ja kovarianssimatriisit ovat S ja Σ :

$$\mu = \mathbb{E}(X), \quad S = \mathbb{E}(X X^T), \quad \Sigma = \mathbb{E}((X - \mu)(X - \mu)^T).$$

Todista, että

1. $\Sigma = S - \mu \mu^T$,
2. S ja Σ ovat symmetrisiä ja positiivisesti semidefiniittejä matriiseja.

5. Olkoon X d -ulotteinen satunnaisvektori, jonka odotusarvo on μ ja jonka kovarianssimatriisi on Σ , ja olkoon $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ vakiomatriisi. Osoita, että

$$\mathbb{E}(X^T A X) = \text{tr}(A \Sigma) + \mu^T A \mu,$$

missä $\text{tr}(B)$ tarkoittaa matriisin B jälkeä, eli $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^d b_{ii}$, kun $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Vihje: Jäljen ominaisuudet $\alpha = \text{tr}(\alpha)$, kun $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\text{tr}(B_1 B_2) = \text{tr}(B_2 B_1)$ voivat olla hyödyksi.