

Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Tilastollinen hahmontunnistus
4. harjoitus, viikko 6, 2010

1. Olkoon $d = 2$, $c = 2$ ja $(X|J = j) \sim N(0, \Sigma_j)$, missä

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hahmottele luokkatiheysfunktioiden f_1 ja f_2 muoto niiden tasa-arvokäyrien avulla. Määritellään luokittelija $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{1, 2\}$ siten että $g(x) = 1$ kun $f_1(x) \geq f_2(x)$ ja $g(x) = 2$ muulloin. Määrää päätösalueet A_1 ja A_2 sekä niiden välinen päätöspinta. Mihin luokkaan luokitellaan piirvektori $x = [1, 2]^T$?

2. Olkoon $d = 1$, $c = 2$, $P_1 = P_2 = 0.5$ ja $(X|J = j) \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, missä $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 4$. Luokkien jakaumat ovat siis normaalit annetuilla parametreilla. Oletetaan, että $P_1 = P_2 = 0.5$. Muodosta posterioritodennäköisyyksien $P(j|x)$ lausekkeet, $j = 1, 2$ ja hahmottele niiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.

3. Oletetaan, että $(X|J = j) \sim N(\mu_j, \Sigma)$, eli että luokan j jakauma on multinormaali parametrein μ_j ja Σ . Osoita, että

$$\frac{P(j|x)}{P(c|x)} = \exp(\alpha_j + \beta_j^T x), \quad j = 1, \dots, c-1.$$

Kirjoita eksplisiittiset lausekkeet skalaareille α_j ja vektoreille β_j .

4. Osoita, että jos c :n luokan luokittelutehtävässä on

$$\frac{P(j|x)}{P(c|x)} = \exp(r_j(x, \theta)), \quad j = 1, \dots, c-1,$$

missä $r_j(\cdot, \theta)$ on jokin parametrivektorin θ avulla määritelty funktio (kuten edellisessä tehtävässä), niin tällöin

$$P(j|x) = \frac{\exp(r_j(x, \theta))}{\sum_{k=1}^c \exp(r_k(x, \theta))}, \quad j = 1, \dots, c,$$

kun valitaan $r_c = 0$. (Käytä hyväksi tietoa $\sum_{j=1}^c P(j|x) = 1$.)

5. Tämän harjoituksen voit tehdä jollain matemaattisella/tilastollisella ohjelmistolla (MATLAB, R, ...). Muodosta lineaarikuvaus, joka valkaisee normaali-jakauman $N(\mu_1, \Sigma_1)$, jossa

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1.75 & -1.299 \\ -1.299 & 3.25 \end{bmatrix}.$$

Muodosta lineaarikuvaus, joka diagonalisoi samanaikaisesti normaalijakaumat $N(\mu_1, \Sigma_1)$ ja $N(\mu_2, \Sigma_2)$, jossa

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 5.625 & 3.375 \\ 3.375 & 5.625 \end{bmatrix}.$$

Tarkista valkaisun ja diagonalisoinnin onnistuminen generoimalla riittävä määrä satunnaisvektoreita annetuista jakaumista ja piirtämällä sekä alkupe-
räisten että muunnettujen vektoreiden hajontakuvio.