

Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Tilastollinen hahmontunnistus
7. harjoitus, viikko 9, 2010

1. Olkoon kahden normaali-jakautuneen luokan tapauksessa $P_1 = P_2$ ja

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Miten kvadraattinen luokitin luokittelee vektorit $x = [1, 2]^T$ ja $x = [1/2, 0]^T$?

2. Eräässä korrelaatioluokitinta käyttävässä järjestelmässä hahmontunnistus perustuu sähköjännitteen $X(t)$ vaihteluun aikavälillä $0 \leq t \leq 1$. Luokkaa 1 vastaava jännite on $5 \sin(2\pi t)$, $t \in [0, 1]$, luokkaa 2 vastaava jännite on 0 ja $P_1 = P_2$. Luokittelua varten jännite mitataan pisteissä $t_i = (i-1)/10$, $i = 1, \dots, 11$ ja mitaukseen tulevan kohinan (virheen) oletetaan noudattavan jakaumaa $N(0, I_{11})$. Miten luokitellaan vakioarvoinen mitta $[a, \dots, a]^T \in \mathbb{R}^{11}$, $a \in \mathbb{R}$? Onko tällainen mitattu jännite jotenkin ristiriidassa laitteiston toimintaa koskevien oletusten kanssa?

3. Tarkastellaan kahden $\mathbb{R}^d$:ssä normaalisti jakautuneen luokan tilannetta,

$$(X|J=j) \sim N(\mu_j, \Sigma_j),$$

kun $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ ja prioritodennäköisyydet P_1 ja P_2 ovat mielivaltaiset. Merkitään $r_j(x) = \sqrt{(x - \mu_j)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_j)}$.

- (a) Näytä, että r_j^2 :n gradientille pätee

$$\nabla r_j^2(x) = 2\Sigma^{-1}(x - \mu_j).$$

- (b) Näytä, että jos s on pisteen μ_j kautta kulkeva suora, niin $\nabla r_j^2(x)$ osoittaa samaan suuntaan kaikissa pisteissä $x \in s$. Onko tämä suunta välttämättä sama kuin s :n suunta?

4. Tarkastellaan vielä edellisen tehtävän tilannetta. Olkoon s pisteiden μ_1 ja μ_2 kautta kulkeva suora (oletetaan, että $\mu_1 \neq \mu_2$). Osoita, että Bayesin luokittimen päätöspintana oleva hypertaso on tangenttitaso luokkien tiheysfunktioiden tasarvoellipsoideille siinä pisteessä missä taso leikkaa suoran s .

5. Tarkastellaan tehtävän 1 tilannetta mutta luovutaan oletuksesta $P_1 = P_2$. Määrrä Bayesin luokittimen päätössääntö parametrin $u = \log(P_1/P_2)$ funktiona. Esitä lauseke Bayesin luokittimen virhetodennäköisyydelle parametrin u funktiona standardinormaali-jakauman kertymäfunktion Φ avulla.