

Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden laitos
Tilastollinen hahmontunnistus
9. harjoitus, viikko 11, 2010

1. (Φ -kone)

Olkoot $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p$ ja

$$t(x; \theta) = \sum_{i=1}^p \theta_i \varphi_i(x).$$

Määritellään luokitin tavanomaisella säännöllä

$$t(x; \theta) \underset{2}{\overset{1}{<}} 0.$$

Tällaista päätössääntöä kutsutaan kirjallisuudessa usein Φ -koneeksi. Kuten luennoilla on esitetty, voidaan parametrivektori θ optimoida regression avulla minimoimalla keskimääräinen neliöllinen virhe $R(\theta)$. Ottaen mallia luennolla käsitellystä lineaarisesta luokittimesta, johda parhaalle θ :lle likiarvo minimoimalla neliöllisen virheen estimaatti $\hat{R}(\theta)$, joka on saatu opetusvektoreiden (X_i, J_i) , $i = 1, \dots, n$ avulla.

2. Kirjoita päätössääntö

$$x^T A x + a^T x + \alpha \underset{2}{\overset{1}{<}} 0$$

Φ -koneen muotoon. Valitse funktiot φ_i siten, että ne ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia. Matriisi A oletetaan symmetriseksi.

3. Muodosta lineaarinen luokitin $\mathbb{R}^2$:ssa regression avulla, kun luokan 1 opetusvektorit ovat $[0, 0]^T$, $[0, 1]^T$ ja $[1, 0]^T$ sekä luokan 2 opetusvektorit ovat $[-1, 0]^T$ ja $[0, -1]^T$. Määrä luokkien päätösalueet.

4. Tässä tehtävässä käytämme matriisille $A = [a_{ij}]$ Frobeniuksen normia

$$\|A\| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

1. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Osoita, että matriisiyhtälön

$$AX = B$$

yleistetty ratkaisu on

$$\tilde{X} = A^+ B.$$

Aivan kuten lineaarisen yhtälöryhmän yleistetyn ratkaisun, määrittelemme matriisiyhtälön yleistetyn ratkaisun seuraavien ehtojen avulla:

$$(a) \quad \|A\tilde{X} - B\| = \min\{\|AX - B\| \mid X \in \mathbb{R}^{p \times q}\}$$

$$(b) \quad \|AX - B\| = \|A\tilde{X} - B\| \Rightarrow \|X\| \geq \|\tilde{X}\|.$$

2. Olkoon $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ja $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Mikä on matriisiyhtälön

$$XC = D$$

yleistetty ratkaisu? Yleistetyllä ratkaisulla tarkoitetaan nyt normiltaan pienintä niistä matriiseista, jotka minimoivat erotuksen $XC - D$ normin. (Vihje: $\|A^T\| = \|A\|$)

5. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^2$ suljettu kolmio. Käyttäen merkkifunktiota sgn aktivaatiofunktiona, suunnittele perceptron kerrosverkko, joka tunnistaa K :n. Eli, jos $y = t(x; \theta)$ on verkon ulostulo syötteen ollessa x , tulee olla

$$t(x; \theta) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in K, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R}^2 \setminus K. \end{cases}$$