Oulun yliopisto
Matemaattisten tieteiden yksikkö
Tilastollinen hahmontunnistus
Harjoitus 1

1. Osoita, että matriisille $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ pätee: A:n pystyrivit ovat ortonormaalit jos ja vain jos A:n vaakarivit ovat ortonormaalit.

2. Osoita, että positiivisesti semidefiniitin matriisin ominaisarvot ovat ei-negatiivisia ja että positiivisesti definiitin matriisin ominaisarvot ovat positiivisia.

3. Osoita, että positiivisesti semidefiniitin symmetrisen matriisin determinantti on ei-negatiivinen ja että positiivisesti definiitin symmetrisen matriisin determinantti on positiivinen.

4. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$. Osoita, että A^TA ja AA^T ovat symmetrisiä ja positiivisesti semidefiniittejä. Jos A on lisäksi säännöllinen, osoita että nämä matriisit ovat silloin itseasiassa positiivisesti definiittejä.

5. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$. Osoita, että matriiseilla A^TA ja AA^T on täsmälleen samat positiiviset ominaisarvot (erityisesti moninkertaisten positiivisten ominaisarvojen kertaluvut ovat samat).

6. (Singulaariarvohajotelman ominaisuuksista.)

(a) Oletetaan, että matriisille $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$ on löydetty hajotelma

$$A = U\Lambda V^T,$$

jossa U ja V ovat ortogonaalimatriiseja, ja matriisin Λ ainoat nollasta poikkeavat alkiot sijaitsevat sen päädiagonaalilla (siis kuten luentojen kaavassa (2.4)). Osoita, että U:n pystyrivit ovat matriisin AA^T ominaisvektoreita ja V:n pysytyrivit matriisin A^TA ominaisvektoreita. Mitkä ovat vastaavat ominaisarvot?

(b) Määritellään matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Näiden matriisien (eräät mahdolliset) ominaisarvohajotelmat ovat

$$A = I_2 A I_2, \quad B = I_2 B I_2.$$

Miksi ne eivät kelpaa ko. matriisien singulaariarvohajotelmiksi? Kirjoita matriiseille A ja B singulaariarvohajotelmat (päässälasku!).