

Oulun yliopisto
 Matemaattisten tieteiden yksikkö
 Tilastollinen hahmontunnistus
 Harjoitus 3

1. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrinen positiivisesti semidefiniitti matriisi ja olkoon sen ominaisarvohajotelma $A = U\Lambda U^T$, missä U on ortogonaalinen ja $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Matriisi $A^{1/2}$ määritellään kaavalla $A^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^T$, missä $\Lambda^{1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_d^{1/2})$. Osoita, että

- (a) $A^{1/2}$ on symmetrinen, positiivisesti semidefiniitti ja $A = A^{1/2}A^{1/2}$.
- (b) Jos A on positiivisesti definitti, niin $A^{1/2}$ on säännöllinen ja sen käänteismatriisi on $A^{-1/2}$, joka määritellään kaavalla

$$A^{-1/2} = U \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_d^{-1/2})U^T.$$

Lisäksi $(A^{-1})^{1/2} = A^{-1/2}$ ja $A^{-1/2}AA^{-1/2} = I_d$.

2. Olkoon $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrinen ja positiivisesti definitti. Osoita, että

$$\|x\|_Q = \sqrt{x^T Q x}$$

määrittelee normin \mathbb{R}^d :ssä ts.

- 1. $\|x\|_Q \geq 0$ ja $\|x\|_Q = 0$ jos ja vain jos $x = 0$.
- 2. $\|x + y\|_Q \leq \|x\|_Q + \|y\|_Q$.
- 3. $\|\lambda x\|_Q = |\lambda| \|x\|_Q$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Vihje: kohdassa 2 on apua Q :n neliöjuuresta $Q^{1/2}$.)

3. Olkoon X d -ulotteinen satunnaisvektori, jolla on tiheysfunktio f_X , ja olkoon $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ säännöllinen ja $b \in \mathbb{R}^d$. Määritellään

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

kaavalla $g(x) = Ax + b$. Johda kaava satunnaisvektorin $Y = g(X)$ tiheysfunktiole f_Y . (Vihje: luennot ja muuttujan vaihto Y :n tiheysfunktion määrittelevässä integraalikaavassa).

4. Olkoon

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = U\Lambda U^T, \quad \text{missä} \quad U = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Piirrä ellipsi

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : (x - \mu)^T C^{-1} (x - \mu) = 1\}$$

(Vihje: muuttujanvaihto $y = U^T(x - \mu)$, kuten luennoissa).

5. Tämän harjoituksen voit tehdä jollain matemaattisella/tilastollisella ohjelmistolla (MATLAB, R, ...). Tehtävänä on kirjoittaa ohjelmanpätkä (tai käyttää ohjelmistossa mahdollisesti valmiina olevaa komentoa), jolla saat generoitua otoksen multinormaalijakaumasta, kun sinulle on annettu jakauman kovarianssimatriisi ja keskiarvo. Generoi 100 satunnaisvektoria normaali-jakaumasta, jonka keskiarvo μ ja kovarianssimatriisi Σ ovat

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1.75 & -1.299 \\ -1.299 & 3.25 \end{bmatrix}.$$

Piirrä vektoreiden hajontakuvio (ts. piirrä vektorit pisteinä tasoon).