

1. Osoita, että funktiot

$$e_n(t) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \sqrt{2} \cos(2\pi kt), & n = 2k, \\ \sqrt{2} \sin(2\pi kt), & n = 2k + 1, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}_+$ , muodostavat avaruuden  $L^2([0, 1])$  ortonormaalien jonon  $(e_n)$ .

2. Kuten luennolla mainittiin, voidaan itseasiassa osoittaa, että edellisen tehtävän funktiot  $e_n$  ovat avaruuden  $L^2([0, 1])$  ortonormaali kanta. Muodosta funktiolle  $x(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$  kehitelmä

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

laskemalla kertoimet

$$\langle x, e_n \rangle = \int_0^1 x(t) e_n(t) dt.$$

Jos käytössäsi on jokin sopiva matemaattinen ohjelmisto, piirrä myös osasumman

$$\sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n(t), \quad t \in [0, 1]$$

kuvaaja muutamilla  $m$ :n arvoilla nähdäksesi, että konvergenssia todella tapahtuu, kun  $m$  kasvaa.

3. Osoita, että jatkuvien funktioiden avaruus  $C([-1, 1])$  varustettuna sisätulolla

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t) y(t) dt, \quad x, y \in C([-1, 1])$$

ei ole Hilbertin avaruus.

(Vihje: tarkastele funktiojonoa

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & \text{kun } 0 < t < 1/n, \\ 1, & \text{kun } 1/n \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$n = 2, 3, \dots$  Osoita, että  $(x_n)$  on avaruuden  $C([-1, 1])$  Cauchyn jono mutta että sillä ei kuitenkaan voi olla raja-arvoa tässä avaruudessa.)

4. Etsi esimerkki Hilbertin avaruuden operaattorista, joka ei ole kompakti.

5. Olkoon  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sisätuloavaruus. Todista Schwarzin epäyhtälö

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad x, y \in V.$$

(Vihje: Olkoon  $q(t) = \|tx + y\|^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Totea, että  $q(t)$  on  $t$ :n toisen asteen polynomi. Koska se on ei-negatiivinen, pätee diskriminantille epäyhtälö, josta Schwarzin epäyhtälö helposti seuraa.)