

1. Olkoon satunnaismuuttujan X arvojoukko $\mathcal{X} = \{2, 3, 4\}$ ja $p(2) = 1/2$, $p(3) = 1/3$, $p(4) = 1/6$. Olkoot $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} p(x)$. Mitä voit sanoa raja-arvosta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}?$$

(Vihje: logaritmistä on hyötyä.)

2. Olkoot $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} p(x)$. Määää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [p(X_1, \dots, X_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

Laske sitten tämä raja-arvo tehtävän 1 jakaumalle.

3. Informaatiolähde lähettää riippumattomia bittejä todennäköisyyksillä $p(0) = 0.995$, $p(1) = 0.005$. Viesti binäärikoodataan 100:n bitin lohkoissa siten, että koodisana annetaan vain sellaiselle lohkolle, jossa on korkeintaan 3 ykköstä.

- Jos kaikki koodisanat ovat saman pituisia, mikä on niiden vähimmäispituus kun halutaan, että kaikilla korkeintaan 3 ykköstä sisältävillä lohkoilla on omat erilaiset koodisanansa?
 - Millä todennäköisyydellä esiintyy lohko, jolle ei ole määrätty koodisanaa?
 - Johda todennäköisyyslaskennasta tutun Tšebyševin epäyhtälön avulla yläraja sellaisen lohkon esiintymistodennäköisyydelle, jolle ei ole määrätty koodisanaa. Vertaa samaasi ylärajaa edellisen kohdan tarkkaan tulokseen.
4. Olkoon $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} p(x, y)$. Määää raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{p(X^n)p(Y^n)}{p(X^n, Y^n)}.$$

5. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X , jonka arvojoukko on $\mathcal{X}$. Olkoon $0 < \varepsilon < 1/2$, $B \subset \mathcal{X}^n$ ja $\mathbb{P}\{X^n \in B\} \geq 1 - \varepsilon$. Osoita, että

$$\frac{1}{n} \log |B| \geq H(X) - 2\varepsilon,$$

kun n on riittävän suuri. (Vihje: Osoita ensin, että missä tahansa todennäköisyysavaruudessa pätee, että jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \geq 1 - \varepsilon$, niin $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1 - 2\varepsilon$. Lähde sitten liikkelle tästä epäyhtälöstä ja hyödynnä tyypillistä joukkoa.)