9 Projektiivisen geometrian alkeita

1800-luvun alussa syntynyt projektiivinen geometria oli ensimmäinen todellinen Eukleideen luoman geometrian alueen laajennus. Projektiivista geometriaa voi ja pitäisikin lähestyä omana aksiomaattisena järjestelmänään. Tarkastelemme sitä tässä kuitenkin euklidisen tasogeometrian muunnelmana ja otamme järjestelmään kuuluvat "ideaalielementit" käyttöön heuristisesti. Aika ei salli täydellistä esitystä, joten rajoitumme muutamiin demonstraationluontoisiin yksityiskohtiin.

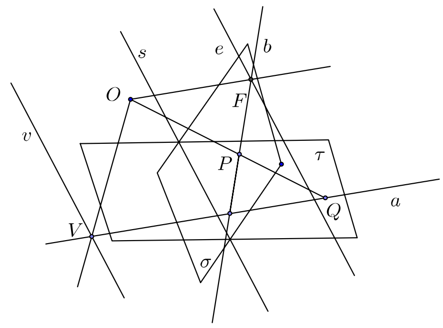
Nimensä mukaisesti projektiivinen geometria tutkii ominaisuuksia, jotka säilyvät keskeisprojektioissa tasolta tasolle. Tällaisiin ominaisuuksiin ei selvästikään kuulu yhtenevyys eikä yhdenmuotoisuus. Sen sijaan suorat ovat tasoille projisoitaessa edelleen suoria, yhdensuuntaiset yhdensuuntaisia ja leikkaukset leikkauksia. Ympyrä ei projisoidu ympyräksi, mutta projektiivisesti voidaan monesti mukavasti yleisemmin käsitellä ympyränsukuisten kuvioiden kuten kartioleikkausten ominaisuuksia. Projektiivisiin tarkasteluihin kuuluvat abstraktit *ideaalielementit*, jotka tekevät monista tuloksista yhtenäisiä ja kompakteja. Pääsääntöisesti projektiivisen tasogeometrian piirissä vallitsee duaalisuusperiaate, jonka mukaan lause säilyy totena, jos siinä vaihdetaan sanojen "suora" ja "piste" paikat. Vastaavasti projektiivisessa avaruusgeometriassa dualisuus on sen kaltainen, että "taso" ja "piste" ovat vaihdettavissa.

9.1 Ideaaliset elementit ja keskusprojektio

Projektiivisen avaruuden alkioina voidaan ajatella olevan "tavallisia" pisteitä, suoria ja tasoja. Jokaisella suoralla on "tavallisten" pisteiden lisäksi yksi ideaalielementti, "äärettömän kaukainen piste". Jokaisella kahdella eri suoralla on tasan yksi yhteinen piste. Tavallisessa mielessä yhdensuuntaiset suorat leikkaavat toisensa ideaalipisteessä. Sen sijaan kahdella tavallisessa mielessä toisensa leikkaavalla suoralla on eri ideaalipisteet. Tason ideaalipisteet muodostavat tason ideaalisuoran. Keskenään yhdensuuntaisilla tasoilla on sama ideaalisuora. Kaikki ideaalisuorat muodostavat avaruuden ideaalitason. – Ideaalipistettä merkitään usein äärettömän symbolilla ∞. Koska ideaalipisteitä on enemmän kuin yksi, merkintä voi olla harhaanjohtava.

Piste ei jaa projektiivista suoraa kahdeksi osaksi; pisteen "toiselle puolelle" pääsee ideaalipisteen kautta. Myöskään suora ei jaa projektiivista tasoa kahteen osaan: suoran a toiselta puolelta toiselle voi kiertää ideaalisuoran kautta pitkin sellaista suoraa b, joka leikkaa a:n muualla kuin ideaalipisteessä.

Ideaalielementtien olemusta selventää *keskusprojektion* tarkastelu. Olkoon O avaruuden piste. Projisoidaan tason τ pisteet tasolle σ. Pisteen $Q \in \tau$ projektio on suoran OQ ja tason σ leikkauspiste P. Suora $a \subset \tau$ tulee projisoitumaan O:n ja a:n kautta kulkevan tason ja tason σ leikkaussuoraksi b. Se a:n piste V, jolle $OV \| \sigma$, projisoituu suoran b ideaalipisteeksi. Suoran a ideaalipiste projisoituu sille b:n pisteelle F, jolle $OF \| a$. Kaikkien a:n kanssa yhdensuuntaisten suorien ideaalipisteet projisoituvat myös pisteelle F. Pisteen V kautta kulkevan, tasojen τ ja σ leikkaussuoran s suuntaisen suoran v pisteet kuvautuvat kukin jollekin tason σ ideaalisuoran pisteelle. Yksikäsitteinen vastaavuus suoran v ja σ:n ideaalisuoran pisteiden välillä perustelee sen, että tason ideaalielementti on juuri suora eikä esimerkiksi piste. Vastaavasti tason τ ideaalisuoran pisteet projisioituvat F:n kautta kulkevalle s:n suuntaiselle suoralle e.

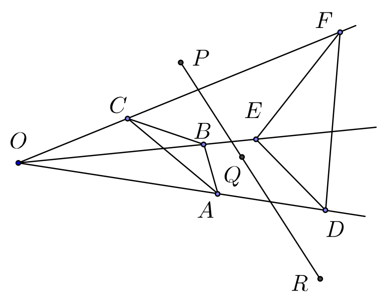


Myös ideaalipistettä voidaan pitää projektiokeskuksena. Koska kaikki ideaalipisteen kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaisia, keskusprojektio, jossa projektiokeskus on ideaalipiste, on sama kuin yhdensuuntaisprojektio.

Klassinen esimerkki tasogeometrian lauseen ”kolmiulotteisesta” projektiivisesta todistuksesta on *Desarguesin*[1] *lause*. Lauseen todistus voidaan rakentaa Menelaoksen lauseen (lause 2.3.3) pohjalle, mutta seuraava todistus on huomattavasti yksinkertaisempi. Lisäksi lauseen tekstissä mainitut leikkauspisteet voivat olla myös ideaalipisteitä.

Lause 9.1.1. *Olkoot ABC ja DEF kolmioita. Suorat AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä O silloin ja vain silloin, kun suorien AB ja DE leikkauspiste P, suorien BC ja EF leikkauspiste Q ja suorien CA ja FD leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Oletetaan, että suorat AD, BE ja CF leikkaavat pisteessä O. Tulkitaan kuvio triedrin $OABC'$ projektioksi tasolle OAB. Valitaan siis tasoon OAB kuulumaton suora OC' ja sellainen projektiopiste, että C' projisoituu pisteeksi C. Tältä suoralta löytyy piste F', joka projisoituu pisteeksi F. Janojen $C'A$, $C'B$, $F'E$ ja $F'D$ projektiot tasolle OAB ovat janat CA, CB, FE ja FD. Suorat $C'B$ ja $F'E$ ovat samassa tasossa (tasossa OBC'). Ne siis leikkaavat toisensa pisteessä Q'. Mutta $C'B$ on tasossa ABC' ja $F'E$ on tasossa EDF'. Piste Q' on siis näiden tasojen leikkaussuoralla. Samalla perusteella janojen $C'A$ ja $F'D$ leikkauspiste R' tällä suoralla, samoin janojen AB ja



[1] *Gérard Desargues* (1593–1662) oli ranskalainen arkkitehti ja projektiivisen geometrian edelläkävijä pari sataa vuotta ennen kuin ala varsinaisesti löydettiin.

DE leikkauspiste P. Mutta suora $PQ'R'$ projisoituu tason OAB suoraksi ja pisteet Q' ja R' projisoituvat BC:n ja EF:n leikkauspisteiksi Q ja AC:n ja DF:n leikkauspisteeksi R. Tästä seuraa, että P, Q ja R ovat samalla suoralla.

Käänteisen lauseen todistus on tavanomaisen epäsuora. Jos P, Q ja R ovat samalla suoralla a, mutta CF ei kulje suorien AD ja BE leikkauspisteen O kautta, niin OC leikkaa (esimerkiksi) janan FD pisteessä F'. Sovelletaan lauseen jo todistettua alkuosaa kolmioihin ABC ja DEF'. AC:n ja DF':n eli DF:n leikkauspiste R, AB:n ja DE:n leikkauspiste P ja BC:n ja EF':n leikkauspiste Q' ovat samalla suoralla. Tämä suora on a. Koska BC:llä ja a:lla on vain yksi yhteinen piste Q, on oltava $Q' = Q$. Sekä F että F' ovat QE:n ja DF:n leikkauspisteitä, joten $F = F'$. □

Harjoitus 9.1.1. *Paperilla on piste A ja kaksi suoraa, joiden leikkauspiste O on paperin (ja kenties pöydän reunankin) ulkopuolella. Piirrä A:n kautta suora, joka (jatkettuna) kulkee O:n kautta.*

9.2 Kaksoissuhde ja projektiiviset kuvaukset

Tarkastellaan neljän samalla suoralla olevan eri pisteen A, B, C ja D kaksoissuhdetta (harjoitustehtävä 95)

$$[A, B, C, D] = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Tässä suoralle on kiinnitetty suunta, ja jananpituudet on varustettu etumerkein. Jos jokin pisteistä on ideaalinen, määritellään kaksoissuhde niin, että ne janat, joiden päätepisteenä tämä ideaalipiste on, jätetään kaavasta pois, ja kaksoissuhteen korvaa pelkkä jakosuhde. Tämä sopii tietenkin yhteen "raja-arvoajattelun" kanssa, jonka mukaan ideaalipiste on "äärettömän kaukana".

Harjoitus 9.2.1. *Olkoon* $[A, B, C, D] = k$. *Osoita, että*

$$[B, A, D, C] = [C, D, A, B] = [D, C, B, A] = k$$

.

Harjoitus 9.2.2. $[A, B, C, D] = k$. *Osoita, että*

$$[A, B, D, C] = \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad [A, C, B, D] = 1 - k.$$

Harjoitus 9.2.3. *Osoita, että* $[A, B, C, D] \neq 1$.

Harjoitus 9.2.4. *Pisteet A, B, C ja D voidaan kirjoittaa jonoon* $4!$ *eri tavalla. Montako eri arvoa voi olla pisteistä muodostetulla kaksoissuhteella?*

Janan jakosuhde ja siis myös neljän pisteen kaksoissuhde säilyy yhdensuuntaisprojektiossa. Se säilyy myös mielivaltaisessa keskeisprojektiossa:

Lause 9.2.1. *Olkoot A, B, C ja D suoran a pisteitä ja olkoon $O \notin a$. Leikatkoot suorat OA, OB, OC ja OD suoran b, $O \notin b$, pisteissä A', B', C' ja D'. Silloin $[A,\, B,\, C,\, D] = [A',\, B',\, C',\, D']$.*

Todistus. Kiinnitetään suoralle a järjestys. Jos h on kolmioiden OAC, OAD, OBC ja OBD yhteinen korkeus, niin kolmion alan laskukaavojen perusteella (kun kulmiin ja janoihin sovelletaan samaa etumerkkisääntöä) on

$$\begin{aligned} AC \cdot h &= OA \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC), \quad & AD \cdot h &= OA \cdot OD \cdot \sin(\angle AOD) \\ BC \cdot h &= OB \cdot OC \sin(\angle BOC) \quad & BD \cdot h &= OB \cdot OD \cdot \sin(\angle BOD). \end{aligned}$$

Saadaan

$$[A,\, B,\, C,\, D] = \frac{\sin(\angle AOC) \cdot \sin(\angle BOD)}{\sin(\angle BOC) \cdot \sin(\angle AOD)}. \tag{1}$$

Koska kaksoissuhde riippuu vain O:n kautta kulkevien suorien välisistä kulmista, se on sama kaikille sellaisille pisteistöille, jotka syntyvät, kun jokin suora leikkaa nämä neljä suoraa. □

Lauseen todistuksessa saatu neljän kulman sineistä koostuva lauseke (1) on saman pisteen O kautta kulkevien neljän suoran OA, OB, OC ja OD muodostaman suorakimpun *kaksoissuhde* $[OA,\, OB,\, OC,\, OD]$. Jos mikä hyvänsä suora leikkaa suorakimpun neljä suoraa, leikkauspisteiden kaksoissuhde on sama kuin suorakimpun kaksoissuhde.

Suoran pisteistöjen $(A,\, B,\, C,\, D)$ ja $(A',\, B',\, C',\, D')$ sanotaan olevan *perspektiivisiä* (pisteen O suhteen), jos jälkimmäisen jonon pisteet ovat edellisen jonon pisteiden projektioita keskusprojektiossa, jonka projektiokeskus on O. Relaatiota merkitään

$$(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\overline{\wedge}} (A',\, B',\, C',\, D') \quad \text{tai} \quad (A,\, B,\, C,\, D) \overline{\overline{\wedge}}_O (A',\, B',\, C',\, D').$$

Pisteistöjen $(A,\, B,\, C,\, D)$ ja $(A',\, B',\, C',\, D')$ sanotaan olevan *projektiivisessa suhteessa* jos niillä on sama kaksoissuhde. Tätä relaatiota merkitään $(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\wedge} (A',\, B',\, C',\, D')$ tai $(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\wedge}_O (A',\, B',\, C',\, D')$. Lauseesta 9.2.1 seuraa, että perspektiiviset neliköt ovat projektiivisia. Käänteinen relaatio ei luonnollisestikaan ole tosi. Mutta jos pisteistöillä on yhteinen alkio, projektiivisuus implikoi perspektiivisyyden. Projektiivisuus on transitiivinen relaatio.

Perspektiivisyys ja projektiivisuus voidaan yhtä hyvin määritellä suorakimpuille. Pisteen O kautta kulkevat suorat a, b, c ja d ja pisteen O' kautta kulkevat suorat a', b', c' ja d' ovat perspektiivisiä, $(a,\, b,\, c,\, d) \overline{\overline{\wedge}} (a',\, b',\, c',\, d')$, jos vastinsuorien ($a$:n ja a':n jne.) leikkauspisteet A, B, C ja D ovat samalla suoralla. Kimput $(a,\, b,\, c,\, d)$ ja $(a',\, b',\, c',\, d')$ ovat projektiiviset, $(a,\, b,\, c,\, d) \overline{\wedge} (a',\, b',\, c',\, d')$, jos $[a,\, b,\, c,\, d] = [a',\, b',\, c',\, d']$.

Lause 9.2.2. *Olkoot A, B, C ja D saman suoran pisteitä ja A, B', C' ja D' saman suoran pisteitä. Jos $(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\wedge} (A,\, B',\, C',\, D')$, niin $(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\overline{\wedge}} (A,\, B',\, C',\, D')$.*

Todistus. Leikatkoot BB' ja CC' pisteessä O. Leikatkoon OD suoran AB' pisteessä D''. Silloin $(A,\, B,\, C,\, D) \overline{\overline{\wedge}}_O (A,\, B',\, C',\, D'')$. Siis

$$(A,\, B',\, C',\, D') \overline{\wedge} (A,\, B,\, C,\, D) \overline{\wedge} (A,\, B',\, C',\, D'').$$

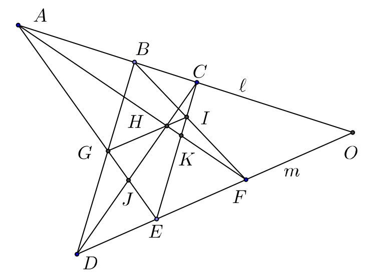
Tämä on mahdollista vain, jos $D' = D''$. □

Todistetaan edellisen lauseen seurauksena klassinen *Pappoksen*[1] *lause.*

Lause 9.2.3. *Olkoot A, B ja C suoran ℓ ja D, E ja F suoran m pisteitä. Silloin AE:n ja BD:n leikkauspiste G, AF:n ja CD:n leikkauspiste H ja BF:n ja CE:n leikkauspiste I ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon O suorien ℓ ja m leikkauspiste sekä J ja K AE:n ja CD:n sekä AF:n ja CE:n leikkauspisteet. Nyt

$$(A, G, J, E) \overline{\overline{\wedge}}_D (A, B, C, O) \overline{\overline{\wedge}}_F (K, I, C, E).$$



Koska perspektiivisyydestä seuraa projektiivinen vastaavuus, on $(A, G, J, E) \overline{\wedge} (K, I, C, E)$. Lauseen 9.2.2 perusteella $(A, G, J, E) \overline{\overline{\wedge}} (K, I, C, E)$. Perspektiivikeskus on suorien AK ja CJ leikkauspiste. Tämä piste on H. Siis G ja I ovat samalla H:n kautta kulkevalla suoralla. □

9.3 Harmoniset pisteet ja täydellinen nelikulmio

Suoran pistenelikköä (A, B, C, D) sanotaan *harmoniseksi*, jos $[A, B, C, D] = -1$. Vastaavasti neljä saman pisteen kautta kulkevaa suoraa muodostaa harmonisen kimpun, jos niiden kaksoissuhde on -1.

Jos (A, B, C, D) on harmoninen, niin $AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0$ eli $AC \cdot (BA + AD) + AD \cdot (BA + AC) = 0$. Kun tämä yhtälö jaetaan $AB \cdot AC \cdot AD$:llä, saadaan

$$-\frac{1}{AD} + \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = 0$$

eli

$$AB = \frac{2}{\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}}.$$

AB on siis AC:n ja AD:n harmoninen keskiarvo.

Harmoniset pisteet liittyvät inversioon: olkoon $AB = 2r$ ja O AB:n keskipiste. Edellinen relaatio voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r + OC} + \frac{1}{r + OD}\right).$$

Yksinkertaisten sievennyksien jälkeen saadaan $OC \cdot OD = r^2$. Pisteet C ja D ovat toistensa kuvia inversiossa ympyrässä, jonka halkaisija on AB.

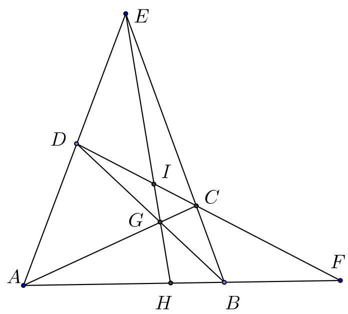
[1] *Pappos Aleksandrialainen*, n. 290–n. 350, viimeinen merkittävä antiikin matematiikko.

Harjoitus 9.3.1. *Millainen on harmoninen pisteistö silloin, kun yksi pisteistä on ideaalipiste?*

Harjoitus 9.3.2. *Mitä muita arvoja kuin* -1 *voi harmonisen pisteistön* $(A,\, B,\, C,\, D)$ *pisteistä muodostetun jonon kaksoissuhde saada?*

Olkoot A, B, C ja D neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Pisteet määrittävät *täydellisen nelikulmion* $ABCD$. Pisteet määrittävät yhteensä $\binom{4}{2} = 6$ suoraa, ja näillä on $\binom{6}{2} = 15$ leikkauspistettä. Jokainen pisteistä A, B, C ja D on kolmen suoraparin leikkauspiste, joten muita leikkauspisteitä on $15 - 4 \cdot 3 = 3$ kappaletta. Ne ovat AD:n ja BC:n leikkauspiste E, AB:n ja CD:n leikkauspiste F ja AC:n ja BD:n leikkauspiste G. Suorat EG, GF ja EF ovat nelikulmion $ABCD$ *lävistäjiä*.

Lause 9.3.1. *Leikatkoon täydellisen nelikulmion* $ABCD$ *lävistäjä* EG *suoran* AB *pisteessä* H *ja suoran* CD *pisteessä* I. *Silloin* $(A,\, B,\, H,\, F)$ *ja* $(D,\, C,\, I,\, F)$ *ovat harmonisia.*



Todistus. $(A,\, B,\, H,\, F) \overline{\overline{\barwedge}}_E (D,\, C,\, I,\, F) \overline{\overline{\barwedge}}_G (B,\, A,\, H,\, F)$. Lauseen 9.2.1 perusteella $[A,\, B,\, H,\, F] = [B,\, A,\, H,\, F]$. Mutta

$$[A,\, B,\, H,\, F] = \frac{1}{[B,\, A,\, H,\, F]}.$$

Koska eri pisteiden kaksoissuhde ei voi olla 1, ainoa mahdollisuus on, että $[A,\, B,\, H,\, F] = -1$. Koska $(A,\, B,\, H,\, F) \overline{\overline{\barwedge}}_E (D,\, C,\, I,\, F)$, $(D,\, C,\, I,\, F)$ on myös harmoninen. □

Edellistä lausetta kutsutaan joskus *projektiivisen geometrian peruslauseeksi*. Sen perusteella on aina mahdollista – pelkkää viivoitinta käyttäen – konstruoida piste, joka muodostaa annettujen kolmen samalla suoralla olevan pisteen kanssa harmonisen pisteistön. Konstruktio on yksinkertainen. Olkoot A, H ja B ovat sanotut kolme pistettä ja olkoon H A:n ja B:n välissä. Valitaan piste E suoran AB ulkopuolelta. Piirretään AE, BE ja HE. Valitaan AE:ltä jokin piste D. Piirretään BD. Se leikkaa EH:n pisteessä G. Piirretään AG. Se leikkaa BE:n pisteessä C. Piirretään DC. Sen ja AB:n leikkauspiste F on kysytty piste.

Koska janan päätepisteet, keskipiste ja ideaalipiste muodostavat harmonisen pisteistön, peruslausetta voidaan käyttää vaikkapa keskipisteen määritykseen.

Harjoitus 9.3.3. *Suorita harmonisen pisteistön* $(A,\, B,\, H,\, F)$ *täydentäminen tilanteessa, jossa tunnetaan* A, B *ja janan* AB *ulkopuolinen piste* F.

Harjoitus 9.3.4. *Määritä kahden yhdensuuntaisen eripituisen janan keskipisteet pelkällä viivoittimella.*

Harjoitus 9.3.5. *Tunnetaan jana* CD *ja sen keskipiste* I. *Piirrä pelkällä viivoittimella pisteen* A *kautta* CD:*n suuntainen suora.*

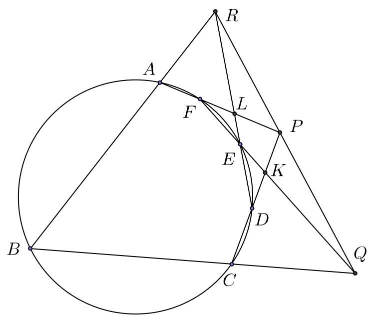
9.4 Pascalin lause

Todistetaan vielä kuuluisa Pascalin lause, joka koskee ympyrän sisään piirrettyä kuusikulmiota. Se perustuu olennaisesti seuraavaan havaintoon.

Jos A, B, C, D, E ja F ovat ympyrän kehän pisteitä, niin suorakimput (EA, EB, EC, ED) ja (FA, FB, FC, FD) ovat projektiivisia. Tämä seuraa välittömästi suorakimpun kaksoissuhteen määritelmästä suorien välisten kulmien sinien avulla ja kehäkulmalauseesta, jonka mukaan kulmat $\angle AEB$ ja $\angle AFB$ jne. ovat joko yhteneviä tai vieruskulmia.

Lause 9.4.1. *Olkoot A, B, C, D, E ja F ympyrän pisteitä. Silloin suorien BC ja EF leikkauspiste Q, suorien CD ja FA leikkauspiste P ja suorien DE ja AB leikkauspiste R ovat samalla suoralla.*

Todistus. Olkoon K suorien DC ja EF leikkauspiste ja L suorien ED ja AF leikkauspiste. Edellä esitetyn havainnon perusteella $[CE, CF, CD, CB] = [AE, AF, AD, AB]$. Suorakimpun ja kimpun suoria leikkaavan suoran ja kimpun suorien leikkauspisteitä koskevan kaksoissuhdetuloksen perusteella



$$[CE, CF, CD, CB] = [E, F, K, Q]$$

ja

$$[AE, AF, AD, AB] = [E, L, D, R].$$

Siis $(E, F, K, Q)\,\overline{\wedge}\,(E, L, D, R)$. Lauseen 9.2.2 perusteella pisteistöt (E, F, K, Q) ja (E, L, D, R) ovat perspektiiviset. Perspektiivikeskus on suorien FL eli AF ja KD eli CD leikkauspiste, siis piste P. Myös vastinpisteet Q ja R ovat perspektiivikeskuksen kautta kulkevalla suoralla. Siis Q, P ja R ovat samalla suoralla. □

Pascalin lause voidaan esittää huomattavasti yleisemmin ehdoin. Ympyrän tilalla voi olla mikä hyvänsä kartioleikkaus. Tämän tekee uskottavaksi se, että kartioleikkaukset ovat suoran ympyräkartion ja tason leikkauskäyriä, ja edellä todettu tilanne voidaan siirtää kartion kärki projektiokeskuksena kartion ympyräleikkaukselta tuolle leikkaustasoille.