11 Analyysi täsmällistyy 1800-luvulla

1700-luku oli ollut matemaattisessa analyysissa villin keksimisen aikaa; menetelmät toimivat ja se riitti, loogisten perusteiden pitävyyttä ei juuri kyselty. 1800-luvulle tultaessa kriittisemmät ja suurempaa täsmällisyyttä korostavat tutkimusasenteet alkoivat saada jalansijaa. Kompleksilukujen parempi ymmärtäminen johti niiden laajempaan käyttöön ja kompleksimuuttujan funktioteorian syntyyn.

Täsmällistämispyrkimykset kytkeytyivät myös korkeamman matematiikan opetukseen, joka lisääntyi huomattavasti École Polytechniquen ja École Normalen kaltaisten oppilaitosten myötä. Opetus pakotti opettajat ja oppikirjojen laatijat miettimään tarkemmin opetettavien asioiden perusteita. – Tässä analyysin kehitystä käsitellään muutaman siihen keskeisesti vaikuttaneen matemaatikon välityksellä. Heistä useiden ansiot ulottuvat muillekin matematiikan aloille, ja niitä sivutaan samalla.

11.1 Cauchy ja Bolzano

Täsmällisyyden pioneeri analyysissa on (Gaussin ohella) ranskalainen *Augustin Cauchy* (1789–1857). Hän oli École Polytechniquen kasvatti, alkoi uransa insinöörinä, mutta siirtyi pian matematiikkaan ja mm. École Polytechniquen opettajaksi. Cauchy tarkasteluja – niin kuin usean muunkin analyysin perusteita pohtineen ja niitä kehittäneen työtä – motivoi opettaminen. Cauchyn École Polytechniquelle kirjoittamaan oppikirjasarjaan kuuluva *Cours d'analyse* (1821) perustuu jokseenkin nykyaikaiseen raja-arvon määritelmään, jossa δ ja ϵ eivät kuitenkaan vielä eksplisiittisesti esiinny, ja sarjojen suppenemisen tarkkaan tutkimiseen. Raja-arvon Cauchy määritteli sanallisesti:

> ”Jos muuttujan peräkkäiset arvot lähestyvät rajatta kiinteätä arvoa niin, että ne lopulta eroavat tästä miten vähän tahansa, niin mainittua kiinteää arvoa kutsutaan muiden arvojen *raja-arvoksi*.”

Todistuksissaan Cauchy kyllä muotoili verbaalisen määritelmänsä (ϵ, δ)-kielelle. Analyysille ja sen täsmällisyydelle tunnusomaiseksi muodostunut symboli ϵ johtuu hiukan paradoksaalisesti sanasta *erreur* eli (approksimaation) virhe.

Jatkuvuuden Cauchy määritteli siten, että muuttuja $f(x+\alpha)-f(x)$ tulee mielivaltaisen pieneksi, kun muuttuja α pienenee rajatta. Usean muuttujan funktion raja-arvon suhteen Cauchy erehtyi. Hän oletti että funktio, joka on kunkin muuttujansa suhteen jatkuva, on itsekin jatkuva. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen, ns. Bolzanon lauseen, Cauchy todisti konstruoimalla vähenevän ja kasvavan jonon (X_n), (x_n), $x_n < X_n$, siten että $f(x_n)$ ja $f(X_n)$ ovat erimerkkiset ja $X_n - x_n = \dfrac{1}{m}(X_{n-1} - x_{n-1})$ (jaetaan $[x_{n-1},\, X_{n-1}]$ m:ään yhtä pitkään väliin; jonkin näistä päätepisteissä f saa erimerkkiset arvot). Jonot suppenevat kohti yhteistä raja-arvoa x, ja jatkuvuus takaa, että $f(x) = 0$.

Sarjojen suppenemisen systemaattinen tutkiminen ja ylipäänsä suppenemisen tärkeyden oivaltaminen[1] on paljolti Cauchyn ansiota. Suppenemisen juuri- ja suhdetestit esiintyvät

[1] Kerrotaan, että Cauchyn suppenemistuloksista kuultuaan Laplace oli kiiruhtanut kotiinsa tarkistamaan, suppenivatko hänen Mécanique célestessä käyttämänsä sarjat.

hänellä, samoin sarjojen tulon antava Cauchyn kertosääntö. Cauchy yritti todistaa Newtonin binomisarjakehitelmän pätevyyden seuraavasti: Jos $\phi(a) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots$, niin kertosääntö antaa $\phi(a+b) = \phi(a)\phi(b)$. Mutta Cauchyn jatkuville funktioille todistaman tuloksen perusteella tällaisen funktionaaliyhtälön ratkaisuja ovat funktiot $\phi(a) = \phi(1)^a$. Koska $\phi(1) = 1 + x$, on $\phi(x) = (1+x)^a$. Binomisarjan selvitti lopullisesti Abel v. 1826.

Funktion derivaatan Cauchy määritteli nykyiseen tapaan erotusosamäärän raja-arvona, kun se aikaisemmin oli ollut pikemminkin infinitesimaalien dy ja dx osamäärä. Funktion $y = f(x)$ differentiaali dy on Cauchylle luku $f'(x)dx$, missä dx on äärellinen luku. Funktion integraalin määritelmää Cauchy ei perustanut antiderivaattaan, kuten aikaisemmin oli tehty. Hän määritteli integraalin $\int_a^b f(x)dx$ summien

$$S_n = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_n)f(x_n)$$

raja-arvoksi, kun välin (a, b) jakovälien (x_i, x_{i+1}) pituudet lähestyvät nollaa. Integraalin Cauchy, joka ei tuntenut tasaisen jatkuvuuden käsitettä, väitti olevan laskettavissa aina, kun f on jatkuva. Näin määritellyn integraalin ja antiderivaatan yhteyden osoittamiseen Cauchy käytti todistamaansa *differentiaalilaskennan väliarvolausetta*, $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, jonka erikoistapauksen oli tosin esittänyt *Michel Rolle* (1652–1719) yli sata vuotta aikaisemmin ja joka seuraa Lagrangen Taylorin sarjan jäännöstermilausekkeesta, ja väliarvolauseen yleistystä

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Viimeinen muoto on selkeästi Cauchyn oma, itse asiassa juuri tämän version Cauchy todisti, ja johti siitä väliarvolauseen tavallisen muodon.

Useissa Cauchyn päättelyissä olennaisen Cauchyn *yleisen suppenemisehdon*, sen, että lukujonon (a_n) suppenemiselle on välttämätöntä ja riittävää erotuksen $|a_{n+p} - a_n|$ pienuus suurilla n:n ja kaikilla p:n arvoilla, oli kyllä havainnut myös tšekkiläinen hengenmies *Bernhard Bolzano* (1781–1848), jonka aikaansa edellä oleva tuotanto jäi pitkään laajemmalti tuntemattomaksi. Vuonna 1817 julkaisemassaan kirjasessa, siis ennen Caychya, Bolzano esitti ensimmäisenä täsmällisessä muodossa nykyaikaisen jatkuvuuskäsitteen: f on jatkuva, jos se muuttuu niin, että $f(x + \omega) - f(x)$ voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä hyvänsä annettu suure, kunhan vain ω tehdään niin pieneksi kuin halutaan. – Cauchyn suppenemisehdon todistaminen onnistuu vain, jos reaaliluvun käsite on täsmällisesti määritelty; yksi perhe reaalilukujen määritelmiä ottaa pohjaksi juuri Cauchyn ehdon.

Tasaisen suppenemisen käsite jäi ilmeisesti vielä Cauchylle jonkin verran epämääräiseksi, vaikka hänen myöhemmissä kirjoituksissaan siihen viittaavia seikkoja onkin. Tasaisen suppenemisen määritelmän ensimmäisenä esittäjänä pidetään englantilaista fyysikkoa *George Stokesia* (1819–1903).

Cauchy on (jälleen Gaussin ohella, joka ei kuitenkaan aikalaisille julkaissut tuloksiaan) *funktioteorian* eli kompleksilukumuuttujan kompleksilukuarvoisten funktioiden tutkimuksen perustaja. Jo Euler ja d'Alembert olivat joutuneet hydrodynamiikassa tekemisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöparin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

kanssa, mutta Cauchy totesi näiden yhtälöiden, sittemmin *Cauchyn–Riemannin yhtälöinä* tunnettujen, merkityksen kompleksilukumuuttujan $z = x+iy$ funktion $w(z) = u(z)+iv(z)$ derivoituvuudelle. Cauchy tutki derivoituvien kompleksifunktioiden eli *analyyttisten funktioiden* tason käyriä pitkin muodostettuja integraaleja; vuonna 1825 hän esitti funktioteoriassa keskeisen merkityksen omaavan *Cauchyn integraalilauseen*, jonka mukaan tällaisen funktion yhdesti yhtenäistä aluetta G ympäröivää umpinaista käyrää $\mathcal{C}$ pitkin laskettu integraali aina häviää. Lause on – ainakin jatkuvan derivaatan omaavien funktioiden tapauksessa – yksinkertainen seuraus taso- ja käyräintegraaleja yhdistävästä *Greenin*[1] *kaavasta*:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(t)\,dt &= \int_{\mathcal{C}} (u+iv)(dx+idy) = \int_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i\int_{\mathcal{C}} (vdx+udy) \\ &= -\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.\end{aligned}$$

Cauchyn integraalilauseen säännöllisyysoletukseksi riittää kuitenkin pelkkä f:n kompleksisen derivaatan olemassaolo. Tämän todisti ranskalainen *Edouard Goursat* (1858–1936) vasta vuonna 1900.

Vuonna 1831 Cauchy osoitti, että analyyttinen funktio voidaan kehittää potenssisarjaksi, jonka suppenemissäde on kehityskeskuksen ja funktion lähimmän erikoispisteen etäisyys. Tämä puolestaan perustuu *Cauchyn integraalikaavaan*, jonka mukaan analyyttiselle funktiolle pätee

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

missä $\mathcal{C}$ on mielivaltainen pisteen z sisäpuolelleen jättävä ja z:n kertaalleen positiiviseen kiertosuuntaan kiertävä umpinainen käyrä. Potenssisarjakehitelmä pisteen z_0 ympäristössä saadaan, kun integroitavan nimittäjä kirjoitetaan muotoon $(w - z_0 - (z - z_0))$ ja käytetään geometrisen sarjan summakaavaa. Lagrangen visio kaikkien funktioiden esittämisestä potenssisarjoina tuli näin osittain toteen.

Cauchy on Eulerin jälkeen kaikkien aikojen tuotteliaimpia matemaatikkoja. Hänen tutkimuksensa koskevat useimpia matematiikan aloja. Esim. determinanttien kertosääntö ja determinanttien teoria nykymuodossaan laajemminkin on suurelta osin hänen työtään. Tavallisten sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa hänen panoksensa on merkittävä. Cauchyn töiden runsaus ja laajuus sai Ranskan tiedeakatemian määräämään julkaisusarjansa artikkelien enimmäispituuden neljäksi sivuksi. Vuoden 1830 vallankumouksen yhteydessä katolinen ja poliittisilta mielipiteiltään vanhoillinen Cauchy joutui jättämään Ranskan; hän oleskeli maanpaossa mm. Prahassa. Ei ole kuitenkaan mitään todisteita Cauchyn

[1] *George Green* (1793–1841), itseoppinut englantilainen fyysikko, julkaisi kaavan vuonna 1828.

ja Bolzanon mahdollisista yhteyksistä, vaikka heidän matematiikassaan samankaltaisia piireteitä onkin.

11.2 Abel, Jacobi, Dirichlet

Norjassa Finnøyn saarella lähellä Stavangeria syntynyt *Niels Henrik Abel* (1802–29) on yksi niistä (kuitenkin melko harvoista) ensi luokan matemaatikoista, joiden elämä on jäänyt traagisen lyhyeksi. Abel oli köyhä ja saapui Euroopan periferiasta. Tämä lienee osasyy siihen, että häntä kohdeltiin tieteellisissä keskuksissa useammin kuin kerran tylysti. Gauss ei vastannut hänen kirjeisiinsä, eikä Ranskan akatemia suostunut ottamaan hänen käsikirjoitustaan vastaan, ”koska käsialasta ei saanut selvää”. Abel elätti itseään mm. yksityistunteja antamalla. Uutinen Abelin nimityksestä professoriksi Berliiniin saapui Norjaan vasta Abelin kuoleman jälkeen. Kuolinsyy oli keuhkotauti.

Abel oli ensimmäisiä, jotka oivalsivat suppenemisen tärkeyden päättymättömillä sarjoilla operoitaessa (”matematiikassa ei ole yhtäkään sarjaa, jonka suppeneminen olisi pitävästi osoitettu!”). Hänet muistetaan kuitenkin parhaiten jo Cardanon ajoista jatkuneiden korkeampaa kuin neljättä astetta olevien algebrallisten yhtälöiden algebrallisten ratkaisujen etsimisen lopettajana; viidennen asteen yhtälön yleisen algebrallisen ratkeamattomuuden Abel todisti jo 19-vuotiaana. (Hiukan puutteellisemman viidennen asteen yhtälön ratkeamattomuustodistuksen oli jo ennen Abelia esittänyt italialainen *Paolo Ruffini*, 1765–1822, etevä amatöörimatemaatikko, lääkäri ammatiltaan.)

Abel tutki elliptisiä integraaleja ja oivalsi Legendreltä huomaamatta jääneen elliptisen integraalin käänteisfunktion kaksijaksoisuuden. Saman havainnon tekivät Abelista riippumatta Gauss ja saksalainen *Carl Jacobi* (1804–51), joka myös kehitteli näiden käänteisfunktioiden, *elliptisten funktioiden*, teoriaa pitemmälle. Abelin lähtökohtana oli havainto, että päältä katsoen elliptistä integraalia muistuttavan integraalin

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

ominaisuuksien selvittely käy luontevammin käänteisfunktion $x = \sin u$ kautta. Jacobilta ovat peräisin elliptisten funktioiden ja trigonometristen funktioiden sukulaisuuteen viittaavat elliptisten funktioiden merkinnät sn, cn ja dn. Funktiot osoittautuivat trigonometristen funktioiden tapaan jaksollisiksi, mutta jaksoja on kaksi. Jaksojen suhde ei ole reaaliluku. Kompleksimuuttujia koskeviin ongelmiinsa Abel haki apua Cauchyltä.

Abel kiinnitti myös huomiota integraaleihin

$$\int \frac{1}{\sqrt{P(x)}}\,dx,$$

joissa P on korkeampaa kuin neljättä astetta oleva polynomi, ja näiden käänteisfunktioihin eli *Abelin funktioihin*. Jacobi puolestaan osoitti, että vastaavanlaisia käänteisfunktioita voi tutkia myös, kun muuttujia on useampia.

Abel on luultavasti historian merkittävin pohjoismainen matemaatikko. Norjan valtio on vuodesta 2003 alkaen jakanut vuosittain kuuden miljoonan Norjan kruunun suuruista *Abelin palkintoa* merkittäville matemaatikoille.

Jacobin ansioita on myös (alkuaan Cauchyn käyttöön ottaman) n:n muuttujan n:n funktion systeemin *funktionaalideterminantin* eli *Jacobin determinantin* merkityksen oivaltaminen ja funktionaalideterminanttien systemaattinen teoria – Jacobi halusi pitää tavallisiakin determinantteja n:n muuttujan n:n lineaarifunktion systeemin funktionaalideterminantteina.

Saksalainen, vaikkakin ranskalaista sukua oleva *Peter Lejeune Dirichlet* (1805–59) toimi pitkään professorina Berliinissä, mutta tuli viimein Gaussin seuraajaksi Göttingenin yliopistoon; hänen postuumeina julkaistut lukuteorian luentonsa popularisoivat ja täydensivät Gaussin vaikeasti luettavaa Disquisitiones Arithmeticæ -teosta. Dirichlet'n tunnetuin lukuteoreettinen tulos kertoo, että jos a:lla ja b:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin aritmeettisessa jonossa $a_n = an + b$ on äärettömän monta alkulukua. Dirichlet'n keksintöä on myös sinänsä yksinkertaisen *laatikkoperiaatteen* tai *kyyhkyslakkaperiaatteen* (jos $n + 1$ esinettä sijoitetaan n:ään laatikkoon, niin ainakin yhdessä laatikossa on enemmän kuin yksi esine) monipuolinen käyttökelpoisuus lukuteoriassa.

Analyytikkona Dirichlet kehitti mm. Fourier'n trigonometrisia sarjoja. Dirichlet oli ensimmäinen vakavasti Fourierin sarjan suppenemista tutkinut matemaatikko. Dirichlet'tä pidetään yleensä modernin funktion määritelmän ensimmäisenä esittäjänä. Fourierin sarjoja käsittelevässä artikkelissa vuodelta 1837 on jakso

> Jos muuttuja y liittyy muuttujaan x siten, että aina kun x:lle annetaan jokin lukuarvo, on olemassa sääntö, jonka perusteella y saa yksikäsitteisen lukuarvon, niin y:n sanotaan olevan x:n funktio.

Itse asiassa yhteys, jossa tämä jakso esiintyy, liittyy jatkuvan funktion määritelmään, ja olennaista on siinä se, että funktion ei tarvitse totella samaa lauseketta koko määrittelyjoukossaan. Melko samoin sanoin oli jatkuvaa funktiota määritellyt jo muutama vuosi aikaisemmin venäläinen *Nikolai Lobatševski* (1793–1856), epäeuklidisen geometrian keksijä. Jo aikaisemmin (1829) Dirichlet oli kuitenkin antanut esimerkin funktiosta, jolla ei ole analyyttista lauseketta: kun x on rationaalinen, niin $y = c$, ja kun x on irrationaalinen, niin $y = d \neq c$.

Dirichlet osoitti, että kohtuullisen säännöllisen funktion f Fourierin sarja suppenee yleensä kohti f:ää, ja että pisteissä, joissa funktio on epäjatkuva, mutta omaa toispuoliset raja-arvot, sarjan summa on raja-arvojen keskiarvo. – Käsite sarjan ehdollinen suppeneminen (siis ilmiö, jossa sarja $\sum a_k$ suppenee, mutta $\sum |a_k|$ ei) on peräisin Dirichlet'ltä.

Dirichlet'n probleema on potentiaaliteorian keskeinen ongelma: alueen G reunalla ∂G määritellyn funktion jatkaminen G:n sisäosaan siten, että jatko toteuttaa Laplacen differentiaaliyhtälön. Probleeman yhteydessä Dirichlet esitti *Dirichlet'n periaatteen* nimellä tunnetun osittain puutteellisen variaatioperiaatteen, joka tuli näyttelemään tärkeää osaa funktioteorian kehityksessä 1800-luvun jälkipuoliskolla. Periaate sanoo, että Dirichlet'n probleeman ratkaiseva funktio f_0 minimoi integraalin

$$\int_G |\nabla f|^2 \, dV$$

kaikkien G:n reunalla annettuun funktioon yhtyvien funktioiden f joukossa. Dirichlet ja periaatetta käyttäneet muutkaan matemaatikot eivät selvittäneet, onko minimointitehtävällä varmasti ratkaisu. Asian selvitti lopullisesti vasta Hilbert vuonna 1899.

11.3 Riemann

Dirichlet'n seuraaja Göttingenissä – joka 1800-luvulla ja 1900-luvun alussa oli maailman ilmeisesti merkittävin matemaattinen tutkimuskeskus – oli *Bernhard Riemann* (1826–66), erittäin omaperäinen ja modernin matematiikan kehitykseen syvästi vaikuttanut tutkija. Abelin tavoin Riemann kuoli keuhkotautiin melko varhaisessa iässä.

Riemannin väitöskirja (1851) käsitteli kompleksimuuttujan funktioita ja niihin liittyvää geometriaa. Se sisälsi mm. *Riemannin kuvauslauseen*, jonka mukaan jokainen yhdesti yhtenäinen tasoalue, joka ei ole koko taso, voidaan yksikäsitteisesti ja konformisesti, siis mikroskooppisella tasolla yhdenmuotoisuuskuvauksena, kuvata mille hyvänsä muulle samanlaiselle alueelle jonkin analyyttisen funktion avulla, ja vallankumouksellisen idean analyyttisten funktioiden, kuten $\sqrt{z}$:n, monikäsitteisyyden poistamisesta siten, että funktion määrittelyjoukkona pidetään tasoalueen sijasta sen päällä mahdollisesti useana kerroksena lepäävää pintaa. Tästä oivalluksesta alkunsa saanut *Riemannin pintojen* teoria on sittemmin johtanut analyysin ja topologian monipuoliseen vuorovaikutukseen ja vaikuttanut ratkaisevasti siihen, että topologiasta on kehittynyt oma elinvoimainen matematiikan haaransa.

Riemannin merkittäviä saavutuksia analyysin alalla on Cauchyn integraalia paljon käyttökelpoisempi *Riemannin integraali*, jonka Riemann kehitti Fourier-sarjojen tutkimuksen yhteydessä mahdollistamaan epäjatkuvien funktioiden integroinnin. Riemannin perusidea oli korvata Cauchyn käyttämä arvo $f(x_i)$ integraalia määrittelevissä summissa $\sum f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ mielivaltaisella arvolla $f(\overline{x}_i)$, missä $x_i \leq \overline{x}_i \leq x_{i+1}$. Integroituvuuden ehdoksi muodostuu se, että summa $\sum O_i(x_{i+1} - x_i)$, missä O_i on f:n kokonaisoskillaatio välillä $[x_i, x_{i+1}]$, lähestyy nollaa jaon tihentyessä. Tasaisesti jatkuva funktio on Riemannin mielessä integroituva. Tasainen jatkuvuus ei vielä ollut käsitteenä selkiintynyt Riemannin aikaan. Toisaalta Riemann saattoi antaa esimerkin funktiosta, jolla on äärettömän tiheässä epäjatkuvuuskohtia, mutta joka kuitenkin on integroituva. Riemannin integraalin nykyinen esitystapa, jossa tarkastellaan integroimisjoukon jakoon liittyviä funktion ala- ja yläsummia $\sum m_i(x_{i+1} - x_i)$, $\sum M_i(x_{i+1} - x_i)$, $m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)$, $M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)$, on peräisin ranskalaiselta *Gaston Darboux*'lta (1842–1917). – Riemann esitti luennoillaan myös esimerkin jatkuvasta funktiosta, jolla ei ole derivaattaa missään. (Tällaisen 1800-luvun funktiokäsitteen perusteita järkyttäneen funktion oli ensimmäisenä konstruoinut Bolzano, mutta muiden Bolzanon töiden tapaan sen kohtalona oli ollut jäädä huomaamatta tieteen keskuksissa.)

Matematiikan kuuluisin avoin kysymys on (kun Fermat'n suuren lauseen ongelma nyt on selvitetty) *Riemannin hypoteesi*. Riemann arveli, että kompleksiluvun $s = \sigma + i\tau$ funktion

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1},$$

missä p_n on n:s alkuluku, meromorfisen jatkon koko tasoon, ns. *Riemannin ζ-funktion*, kaikki ei-reaaliset nollakohdat ovat suoralla $\sigma = \frac{1}{2}$. Riemannin hypoteesi on yhä todistamatta; sillä olisi monia mielenkiintoisia seurauksia lukuteorian alalla. Hadamard ja de la Vallée Poussin käyttivät alkulukulauseen todistuksessa ominaisuutta $\zeta(1 + i\tau) \neq 0$.

Riemann oli nerokas matemaatikko, mutta häntä ei voi varsinaisesti pitää täsmällisyyden apostolina: hänen tutkimusotteensa perustui yleensä geometris-fysikaaliseen intuitioon. Esim. (sinänsä oikean) Riemannin kuvauslauseen todistus perustui puutteelliseen Dirichlet'n periaatteeseen. – Riemannin puhtaasti geometrisista ansioita käsitellään myöhemmin.

11.4 Weierstrass

1800-luvun jälkipuoliskon matemaattisen analyysin keskeisen hahmon *Karl Weierstrassin* (1815–97) tie matematiikan huipulle oli mutkallinen. Epäonnistuneiden juridiikan opintojen jälkeen Weierstrass hankki oppikoulunopettajan pätevyyden ja toimi pikkukaupungeissa matematiikan opettajana, kunnes matemaattinen maailma hänet "löysi" 1854. Elämäntyönsä pääosan Weierstrass teki sitten Berliinin yliopistossa.

Weierstrassin asenne matematiikkaan oli jossain määrin Riemannin asenteen vastakohta. Weierstrass pyrki vapauttamaan analyysin kaikesta intuitiivisesta, saattamaan sen vastaansanomattoman vankalle aritmeettiselle pohjalle. Juuri Weierstrass mm. huomautti Riemannille Dirichlet'n periaatteen virheellisyydestä. Weierstrassin ohjelmaa, *analyysin aritmetisointia*, toteutti hänen lisäkseen runsas joukko oppilaita, jotka usein julkaisivat omissa nimissään oikeastaan mestarin käsialaa olevia tuloksia.

Weierstrass vei loppuun Cauchyn aloittaman differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden lujittamisen ottamalla täysin huomioon tasaisen suppenemisen merkityksen mm. eri rajaprosessien järjestyksen vaihdossa. Nykyanalyysin "epsilonistiikka" on varsinaisesti Weierstrassin koulukunnan vakiinnuttamaa. Weierstrass ei pitänyt raja-arvon aikaisempiin määrittelyihin liittyvistä liikkeen mielikuvista ("lähestyy"). Luennoidessaan 1861 Berliinin Teknillisessä korkeakoulussa Weierstrass esitti jatkuvuuden määritelmän seuraavasti:

> jos on mahdollista määrittää h:lle sellainen raja δ, että kaikille h:n arvoille, joiden itseisarvo on pienempi kuin δ, $f(x+h) - f(x)$ on pienempi kuin mielivaltainen suure ϵ, joka voi olla miten pieni tahansa, niin argumentin äärettömän pieniä muutoksia vastaavat funktion arvojen äärettömän pienet muutokset.

Weierstrass todisti, osin Bolzanon esittämiin ideoihin perustuen, luennoissaan sitovasti sen, että suljetulla välillä jatkuvan funktion arvojen joukossa on suurin ja pienin. Tulokseen johtava yleinen periaate, se, että rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono, tunnetaan Bolzanon–Weierstrassin lauseena. Weierstrassin oppilas *Eduard Heine* (1821–81) julkaisi vuonna 1872 todistuksen sille, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Myös kompleksifunktioiden teoriaan Weierstrass jätti pysyvän jäljen. Analyyttisten funktioiden teorian lähtökohdaksi Weierstrass määritteli potenssisarjat; funktioteorian keskeiseksi työkaluksi muodostui *analyyttinen jatkaminen*: potenssisarjakehitelmän pätevyysaluetta laajennetaan ottamalla käyttöön uusi kehityskeskus ja alkuperäisen suppenemisympyrän ulkopuolelle ulottuva uusi suppenemisympyrä. Analyyttisen jatkamisen kautta jokainen potenssisarja tulee määrittelemään mahdollisimman laajassa alueessa yleensä monikäsitteisen analyyttisen konfiguraation. Weierstrass lähestyi mielestään puhtaasti analyysin keinoin samaa ongelmaa, jonka Riemann ratkaisi geometrispohjaisesti, pintojen ja monistojen kautta. – Funktioteorian perusteisiin Weierstrass johtui elliptisten ja Abelin funktioiden tutkimuksista, joita hän harjoitti opettajantyönsä ohessa ja joista ensimmäiset julkaistiin koulujen vuosikertomuksissa.

11.5 Irrationaalilukujen luokat ja reaalilukujen täsmällinen määrittely

Reaalilukujen jakautuminen *rationaalisiin* ja *irrationaalisiin* oli periaatteessa tunnettua jo pythagoralaisten ajoista. Euler arveli jo 1740-luvulla, että tietyt luvut saattaisivat olla *transkendettisia*, ts. eivät olisi *algebrallisia* eli kokonaiskertoimisten polynomien nollakohtia. Konkreettisen esimerkin transkendenttiluvusta esitti vuonna 1844 ranskalainen *Joseph Liouville* (1809–82). Liouvillen mukaan transkendettisia ovat kaikki luvut, jotka ovat muotoa

$$\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^{2!}} + \frac{k_3}{10^{3!}} + \cdots,$$

missä k_i:t ovat 1:n ja 9:n välillä olevia kokonaislukuja. Todistus perustuu siihen, että algebrallista lukua ei voi aivan tarkkaan approksimoida rationaaliluvuilla, joiden nimittäjät ovat ylhäältä rajoitettuja. Sittemmin on keksitty vähemmän eksoottisia transkendenttilukuesimerkkejä kuten 0,1001000100001 . . ..

Vuonna 1873 ranskalainen *Charles Hermite* (1822–1901) onnistui osoittamaan, että Neperin luku e on transkendenttinen; π:n suhteen saman asian todisti kymmenen vuotta myöhemmin saksalainen *Ferdinand Lindemann* (1852–1939). Lindemannin todistus osoitti lopullisesti, että antiikista asti matemaatikkoja työllistänyt ympyrän neliöintiongelma ei ratkea euklidisin työvälinein. Monien mielenkiintoisten lukujen algebrallisuus tai transkendenttisuus on edelleen avoin: yksi tällainen luku on Eulerin vakio γ. Toisaalta tiedetään, että ”valtava enemmistö” reaaliluvuista on transkendettisia: algebrallisia lukuja on vain numeroituva määrä.

Monien matemaattisen analyysin loogisten vaikeuksien keskeinen syy oli itse *luvun* käsitteen epämääräisyys. Irrationaaliluku voitiin käsittää rationaalilukujen jonon raja-arvoksi, mutta toisaalta raja-arvon määritelmä jo edellytti, että raja-arvokandidaatti oli olemassa ja siis määritelty. Cauchy ja Bolzano olivat pyrkineet määrittelemään jonon suppenemisen pelkästään sen termien avulla (*Cauchyn kriteeri*), ja Bolzano oli lisäksi pyrkinyt määrittelemään reaaliluvut rationaalilukujonojen avulla, mutta vasta vuosina 1869–72 tällainen määrittely onnistui tyydyttävällä tavalla. Määritelmän esittivät toisistaan riippumatta ranskalainen *Charles Méray* (1835–1911), joka oli jo aikaisemmin kiinnittänyt huomiota mainittuun ristiriitaisuuteen, sekä Weierstrass oppilaansa Eduard Heinen ja tämän yhteistyökumppanin *Georg Cantorin* (1845–1918) kanssa. Lukujonomääritelmässä lähtökohtana ovat rationaalilukujen *perusjonot* eli Cauchyn jonot; tällainen jono (tai jonojen ekvivalenssiluokka) määrittelee reaaliluvun. Reaalilukujen järjestysominaisuudet ja laskutoimitukset palautetaan jonojen termien vastaaviin ominaisuuksiin. Olennaista on, että näin määritellyistä reaaliluvuista muodostetut Cauchyn jonot aina suppenevat kohti jotain reaalilukua. Reaalilukujen joukko on täydellinen, laajennuksia ei tarvita.

Lukujonoihin perustuvan reaaliluvun määrittelyn rinnalle syntyi samana vuonna, 1872, suoremmin reaaliluvun geometriseen mielikuvaan ja Eudoksoksen klassiseen suhdeoppiin kytkeytyvä *Richard Dedekindin* (1831–1916) määritelmä. Sen mukaan reaaliluvun määrittelee jokainen *Dedekindin leikkaus*, rationaalilukujen joukon jako kahdeksi yhteisalkiottomaksi osajoukoksi $\underline{A}$ ja $\overline{A}$, missä jokainen joukon $\underline{A}$ luku on jokaista joukon $\overline{A}$ lukua pienempi. Sellaiset leikkaukset, joissa $\underline{A}$:ssa on suurin tai $\overline{A}$:ssä pienin luku, vastaavat rationaalilukuja, muut irrationaalilukuja. Reaalilukujen laskutoimitukset määritellään leikkaukset määrittävien rationaalilukujoukkojen laskutoimituksien avulla. Kun vastaava konstruktio tehdään reaalilukujen joukossa, osoittautuu, että leikkaukset voidaan samastaa reaalilukuihin. Menettelyllä ei siis voi tuottaa enää reaalilukujen joukkoa laajempia lukujoukkoja.

Irrationaalilukujen täsmällisen määrittelyn epäjaksollisina desimaalilukuina esitti saksalainen *Otto Stolz* (1842–1905) vuonna 1886. Puhtaasti aksiomaattinen reaalilukujen määritelmä on peräisin Hilbertiltä vuodelta 1899.