802362A Inversio-ongelmien laskennallinen peruskurssi

Mikko Orispää
mikko.orispaa@oulu.fi

- 5 opintopistettä, periodi 3
- Luennot M304, 16.1.–7.3.2012
  - Ma 12–14
  - Ti 12–14
- Vastaanotto
  - Ma 9–11 tai sop. mukaan

Lineaarinen inversio-ongelma

Suora ongelma: *A* ja *x* tunnetaan, laske *m*

$$m = Ax$$

Käänteinen ongelma: *A* ja *m* tunnetaan, ratkaise ***x***

$$x = A^{-1}m$$

Entä, jos matriisi *A* ei ole neliömatriisi, tai ei ole kääntyvä?

Etsitään "paras mahdollinen" ratkaisu!

Hyvin ja huonosti asetetut ongelmat

- Jaques Hadamard
- Ongelma on hyvin asetettu (well-posed), jos:
    1. Ongelmalla on ratkaisu;
    2. Ratkaisu on yksikäsitteinen;
    3. Ratkaisu riippuu jatkuvasti datasta
- Jos jokin kohdista 1–3 ei toteudu, on ongelma huonosti asetettu (ill-posed)

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

Sovitetaan datapisteet 5. asteen polynomiin

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + p_5 x^5$$

pisteissä $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Lineaarinen ylideterminoitu ongelma

$$m = Ap$$

Vektori *m* sisältää datan

$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)^T$$

Vektori *p* sisältää tuntemattomat kertoimet

$$p = (p_0, p_1, \ldots, p_5)^T$$

Matriisi *A* on muotoa

$$A = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & x_2^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & x_n^4 & x_n^5 \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

Lineaarinen ylideterminoitu ongelma

$$m = Ap$$

voidaan ratkaista käyttämällä ns. pienimmän neliösumman menetelmää, eli etsiä ratkaisu p_0, joka minimoi ns. residuaalin

$$\min_{p_0 \in \mathbb{R}^6} ||m - Ap_0||^2$$

Tässä tapauksessa p_0 saadaan kaavalla

$$p_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

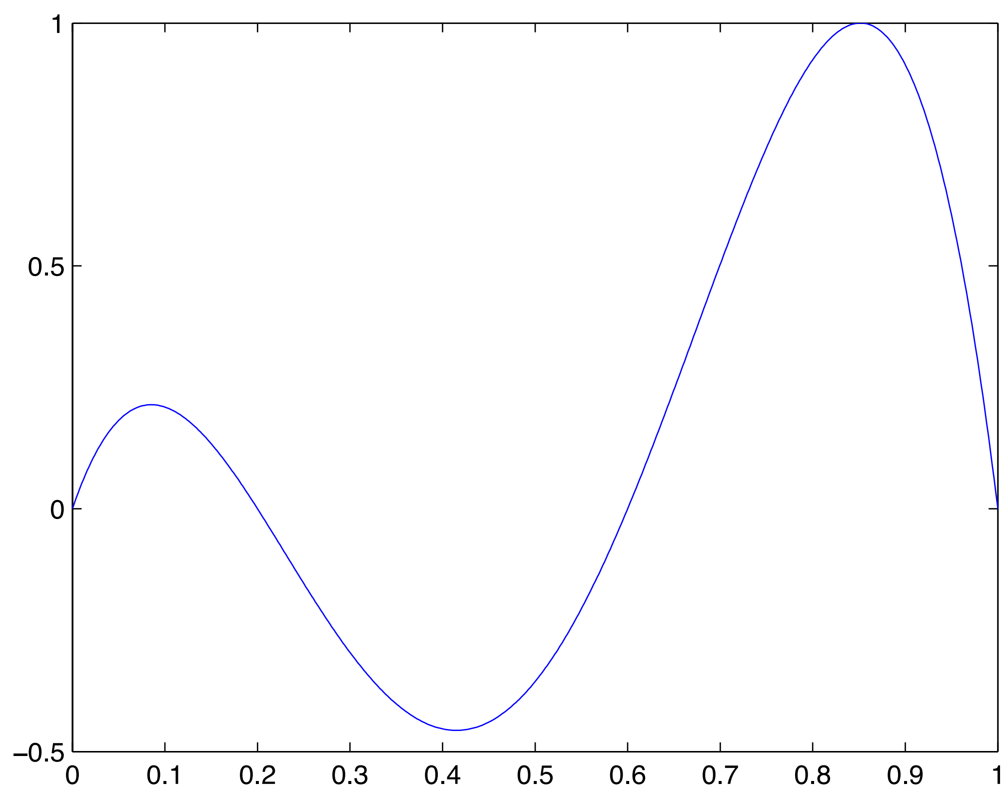
Sovitettu käyrä saadaan laskemalla

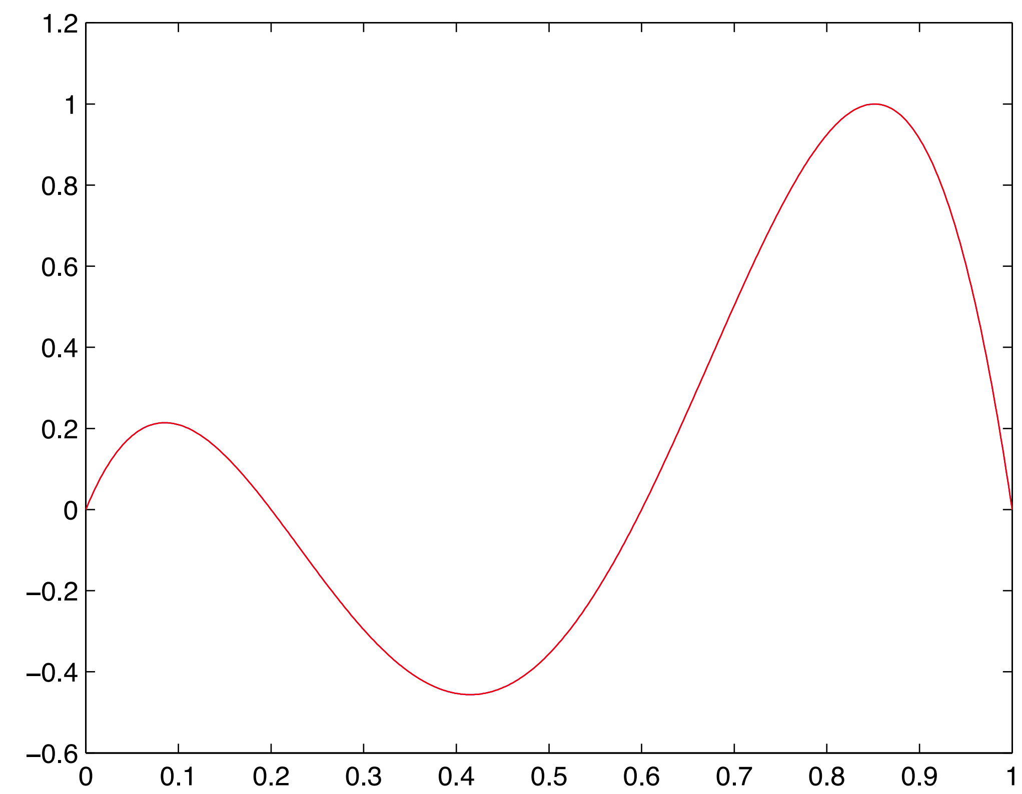
$$f_0 = Ap_0$$

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

$$f(x) = -100x(x-1)(x-0.6)(x+20)(x-0.2)/43$$

Virheetön data



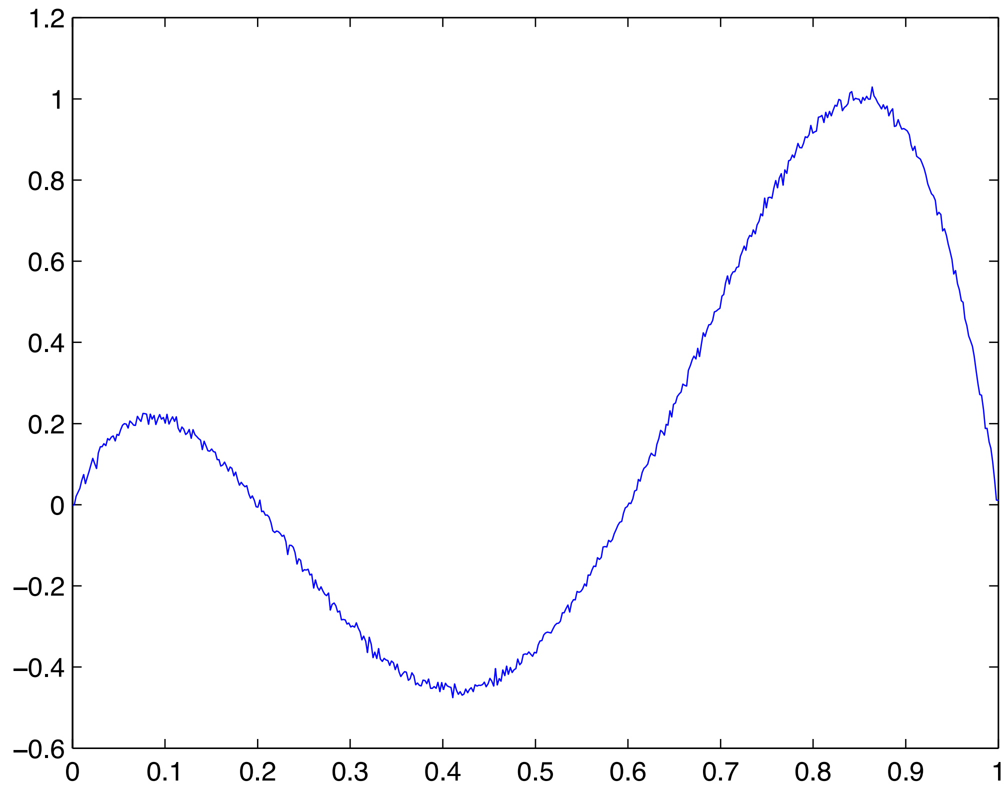


$$p_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

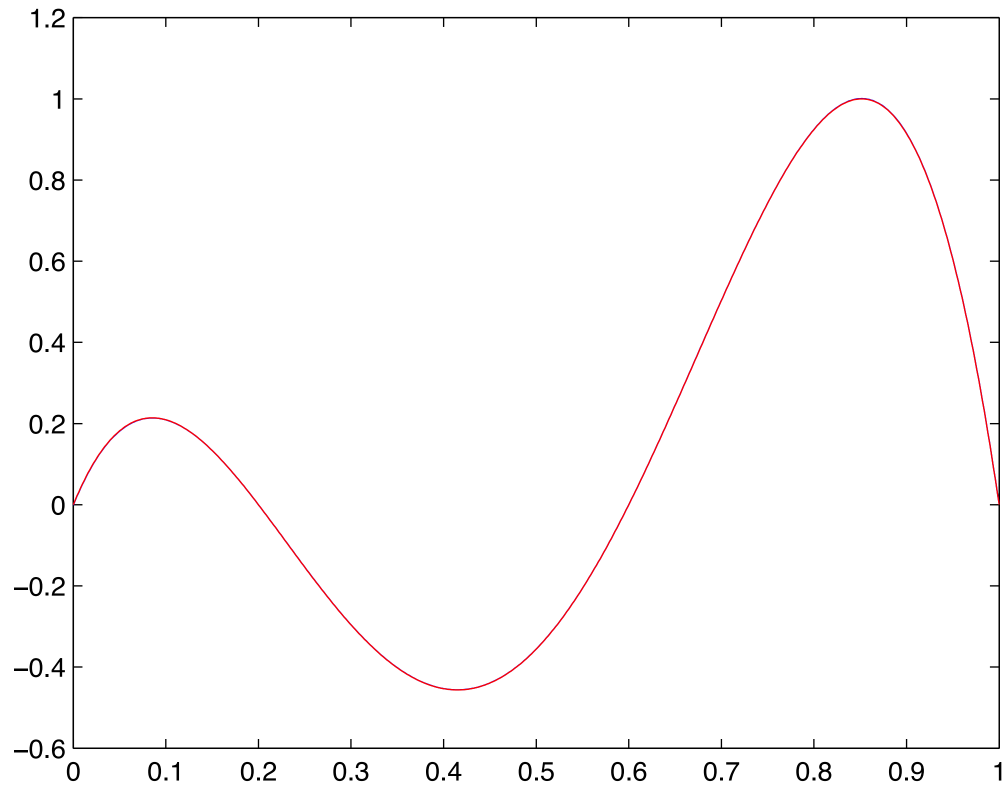
$$f_0 = A p_0$$

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

Dataan lisätty gaussista kohinaa, MAE~0.008



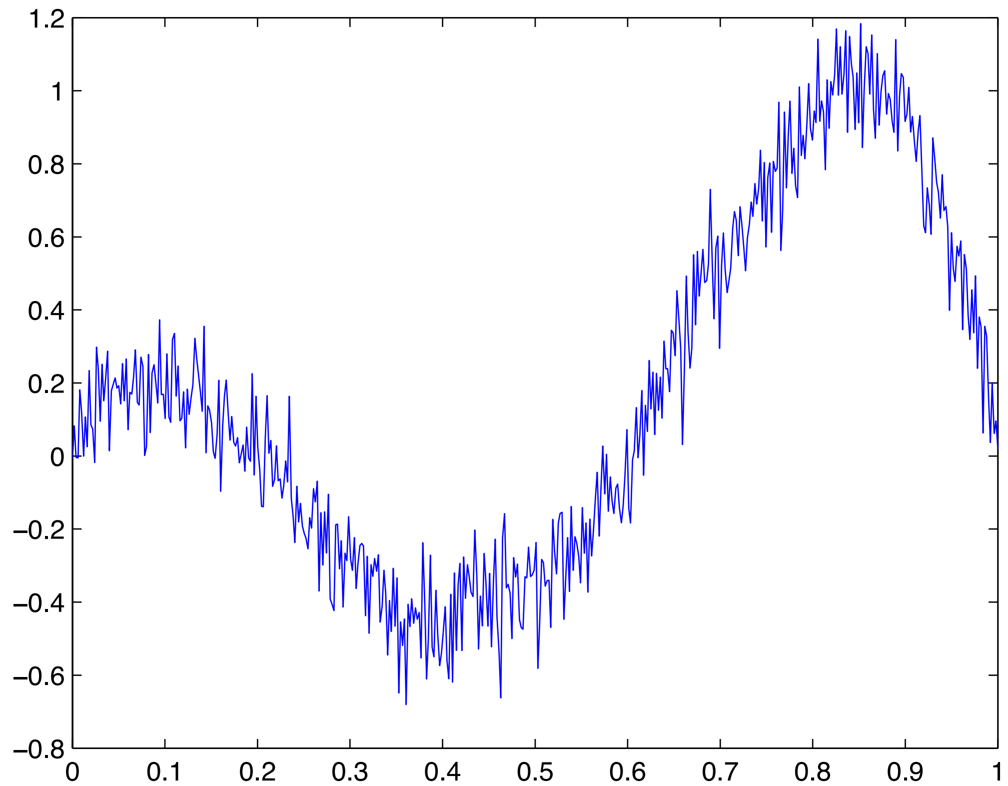
$$p_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

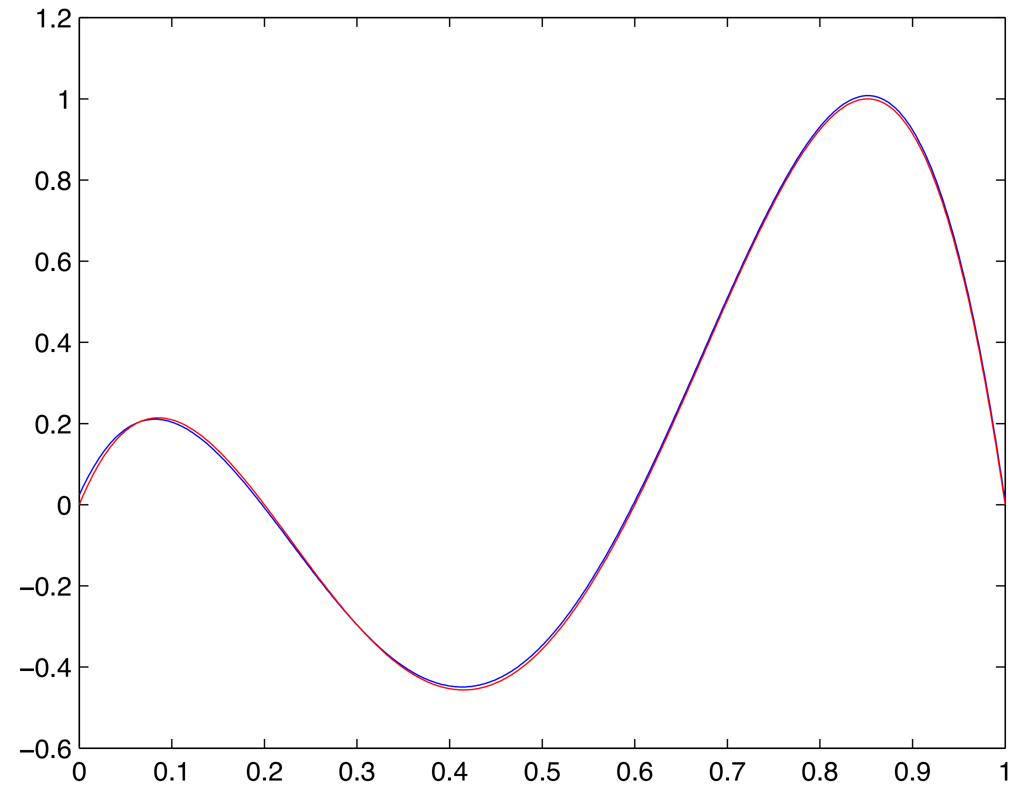


$$f_0 = A p_0$$

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

Dataan lisätty gaussista kohinaa, MAE~0.08



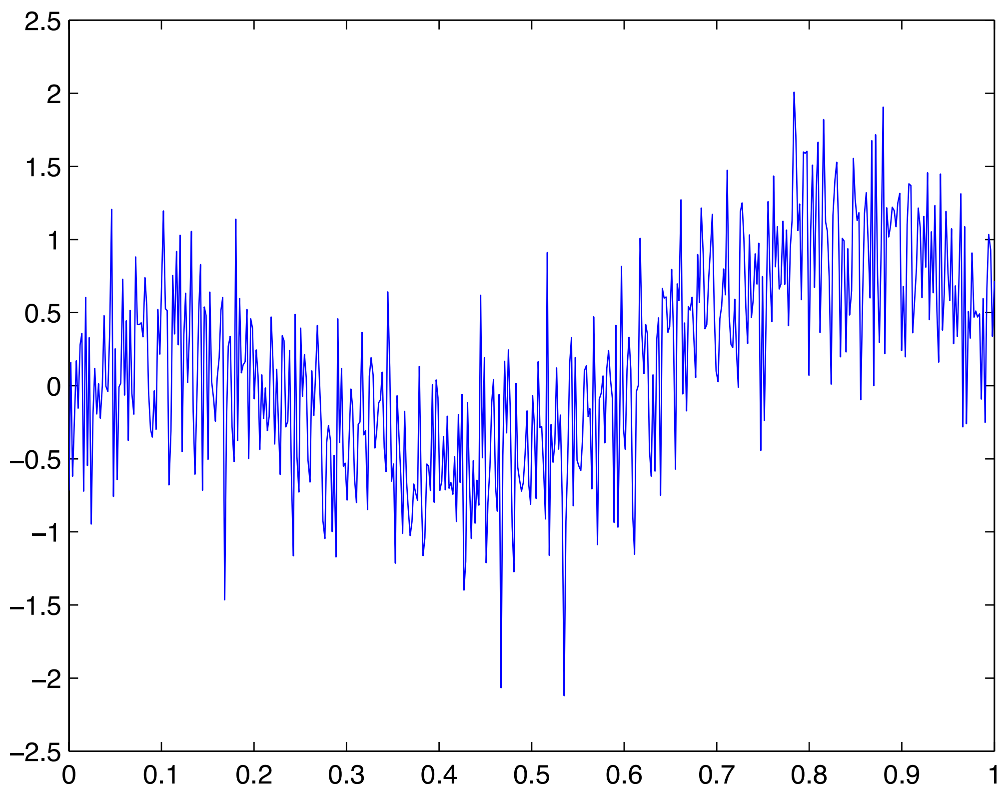


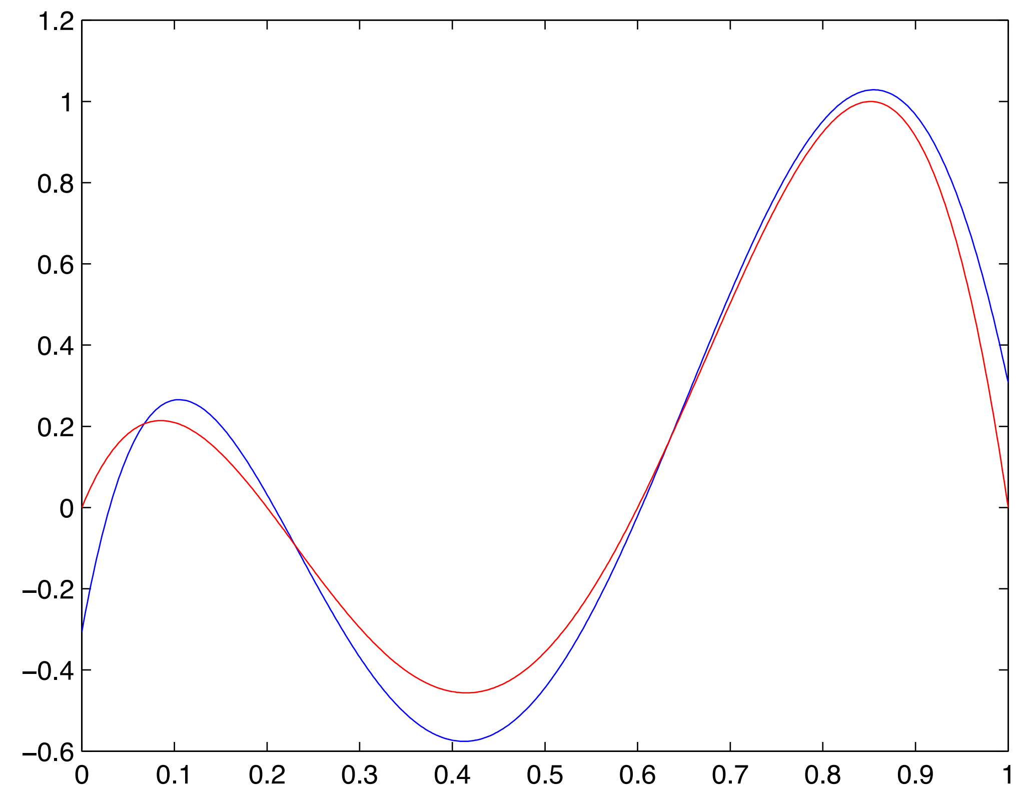
$$p_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

$$f_0 = A p_0$$

Esimerkki: Datan sovitus polynomiin

Dataan lisätty gaussista kohinaa, MAE~0.4



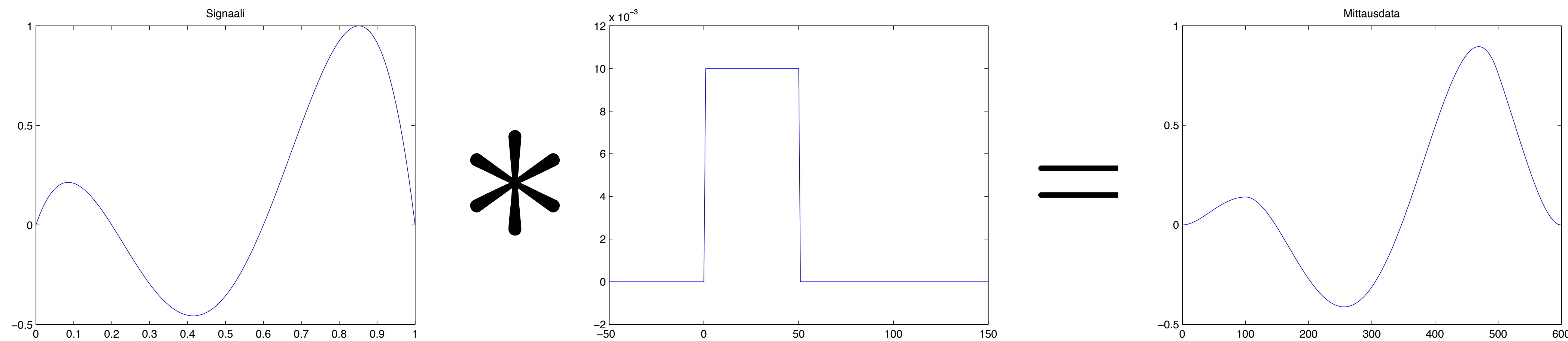


$$p_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

$$f_0 = A p_0$$

Esimerkki: Dekonvoluutio

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

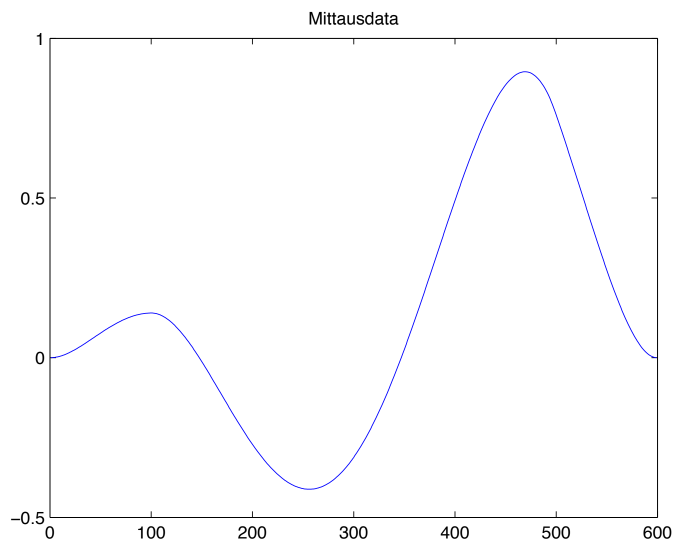


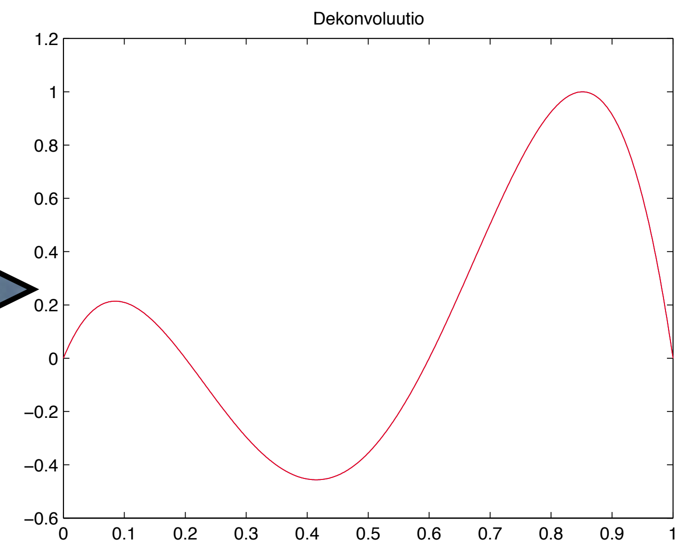
$$(f * g)(x_t) = \sum_{s=1}^{s=n} f(x_t - x_s)g(x_s)$$

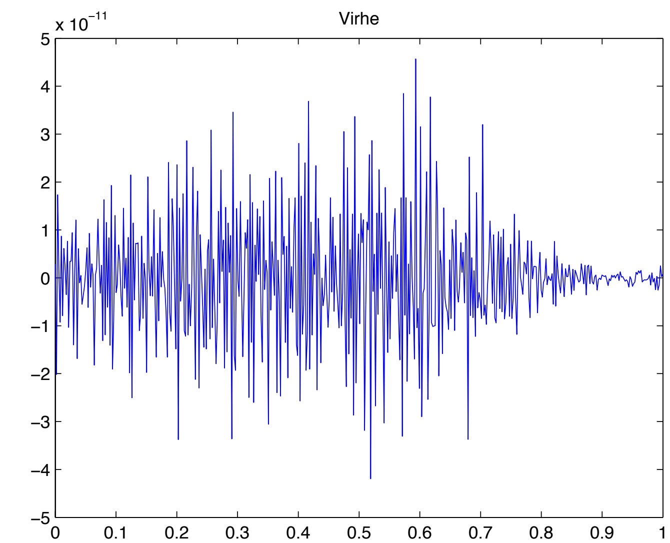
$$Ax = m$$

Esimerkki: Dekonvoluutio

Virheetön data

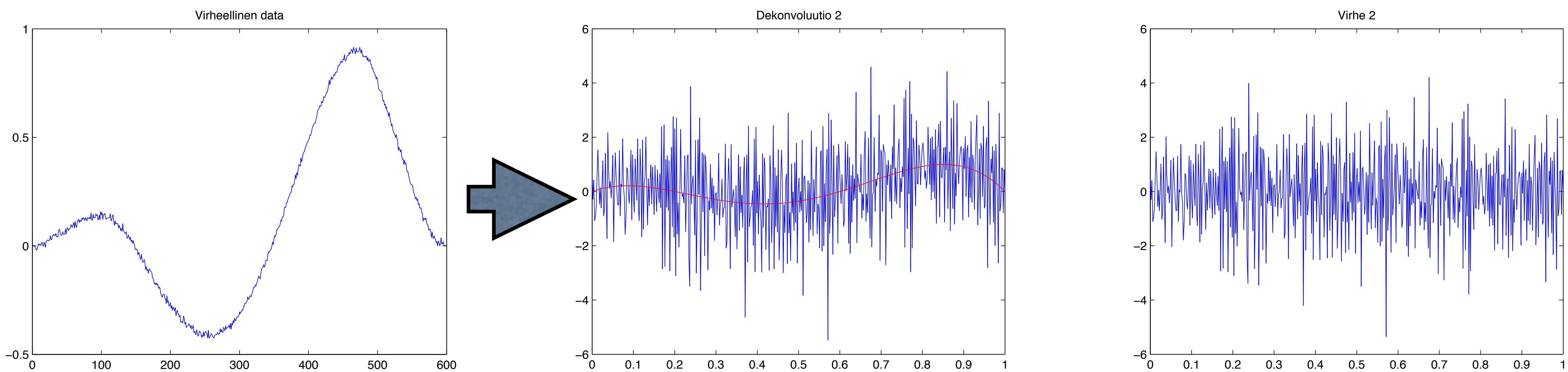






$$x_0 = (A^T A)^{-1} A^T m$$

Esimerkki: Dekonvoluutio

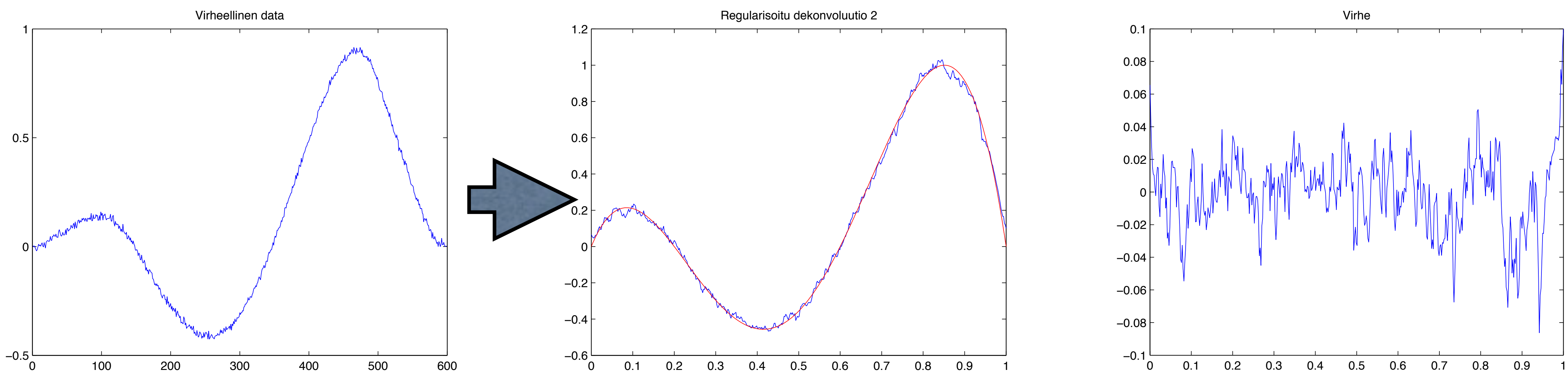


$$x_0 = (A^T A)^{-1} A^T m_{d_1}$$

Dekonvoluutio

Dataan lisätty gaussista kohinaa, MAE~0.008

Esimerkki: Dekonvoluutio

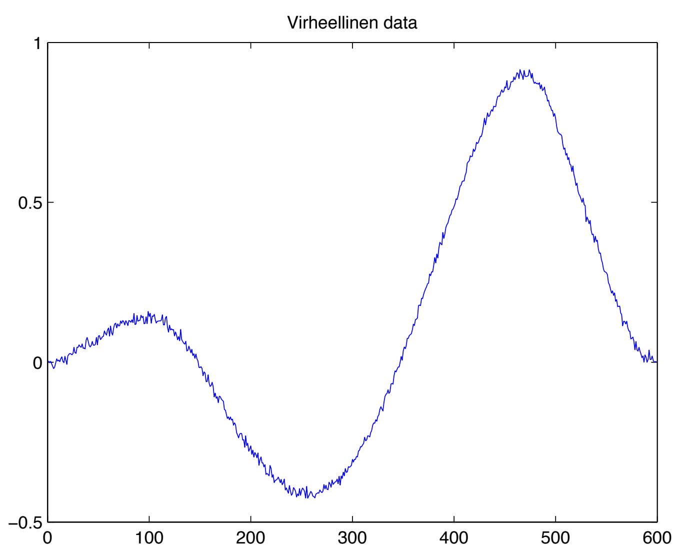


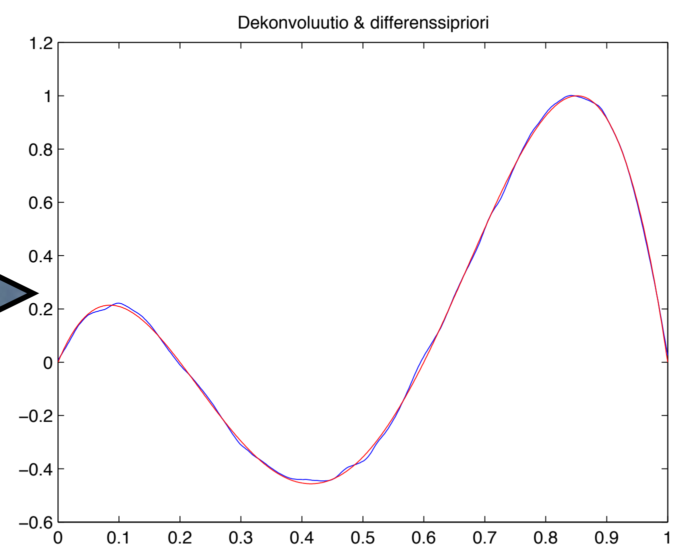
$$A_R = \begin{bmatrix} A \\ \sigma I \end{bmatrix} \quad m_R = \begin{bmatrix} m_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_0 = (A_R^T A_R)^{-1} A_R^T m_R$$

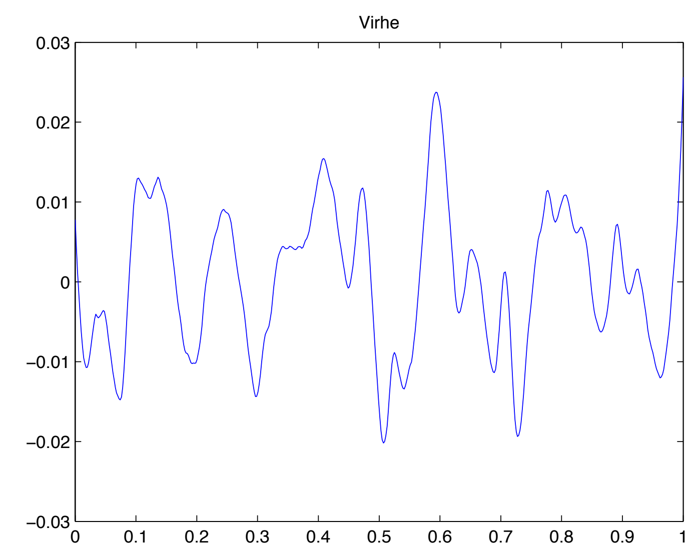
Regularisoitu dekonvoluutio, $\sigma = 0.1$

Dataan lisätty gaussista kohinaa, MAE~0.008

Esimerkki: Dekonvoluutio







$$A_D = \begin{bmatrix} A \\ \delta D \end{bmatrix} \quad m_D = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_0 = (A_D^T A)^{-1} A_D^T m_D$$

Dekonvoluutio + differenssipriori

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Datassa kohinaa, MAE~0.008

$$\delta = 0.75$$

MATLAB luennot (Matemaattiset ohjelmistot)

http://cc.oulu.fi/~markusha/matohj/matlab/

Octave

http://www.gnu.org/software/octave/

R

http://www.r-project.org/