Analyysi I

Harjoitus 13 & 14, kevät 2010 (viikot 16–17)

1. Tutki, millä $x \in \mathbb{R}$ sarjat

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{k+1}$$

   suppenevat.

2. Laske summafunktiot sarjoille

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$

3. (a) Määrää sarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+1}$ suppenemissäde ja summafunktio.

   (b) Olkoon $f(x) = (1+x)^a$, $a \neq 0$, ja oletetaan tunnetuksi, että $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Määrää tämän perusteella kertoimet a_k (vihje: derivoi sarja, kerro luvulla $1+x$ ja vertaa kertoimia).

4. Johda seuraavat Taylorin sarjat käyttämällä annettuja yhtäsuuruuksia ja määrä sarjojen suppenemissäteet:

   (a) $\sinh x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, *hyperbolinen sini* $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

   (b) $\sin^2 x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

   (Muita hyperbolisia funktioita ovat $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ja $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.)

5. Olkoon potenssisarjan $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde R. Olkoot $c \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ vakioita. Määrää potenssisarjojen

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k x^k, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$$

   suppenemissäteet. Huomaa, että tässä ei tiedetä, toimiiko suhde- tai juuritesti annetulle sarjalle.

6. Anna esimerkki potenssisarjasta jonka summalle f pätee

$$\text{(a)} \quad f(0) = 0, f(1) = 2, \qquad \text{(b)} \quad f'(0) = 0, f(1) = 2,$$

Voiko potenssisarjan vaita niin, että sen suppenemissäde on 1? Tai ∞?

7. (a) Määrää sarjan $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ suppenemissäde.
   (b) Osoita, että $f'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja että $f(0) = 1$.
   (c) Päättele (b)-kohdan perusteella, että $f(x) = e^x$. (Ohje: derivoi $f(x)e^{-x}$.)

8. Laske derivaatta $f^{(k)}(x_0)$, kun
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \qquad x_0 = 0, \quad k = 42,$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}, \qquad x_0 = 1, \quad k = 100,$
   (c) $f(x) = x^5 \ln(1+x), \quad x_0 = 0, \quad k = 2000.$

9. Määrää funktioiden

$$\sin x \qquad \text{ja} \qquad \cos x$$

Taylorin sarjat pisteessä $x_0 = 0$. Todista, että nämä sarjat suppenevat kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

10. Määrää, mikäli mahdollista, funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ sarjaesitys pisteessä

$$\text{(a)} \quad x_0 = -1, \qquad \text{(b)} \quad x_0 = 0, \qquad \text{(c)} \quad x_0 = 1.$$

11. Laske Taylorin sarjojen avulla raja-arvot

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{(e^x - 1)^3}.$$

12*. Muodosta Taylorin sarja pisteessä 0 funktiolle

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = e^{-x^2}.$$

Johda tämän avulla sarjaesitys integraalille $\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, ja laske integraalille

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

likiarvo, joka eroaa oikeasta arvosta vähemmän kuin 10^{-6}.