Analyysi I

Harjoitus 9, kevät 2010 (viikko 11)

1. (a) Olkoon $f\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Laske ylä- ja alasumma S_D ja s_D jaolle $D = \{-2,-1,0,1\}$.
   (b) Anna esimerkki funktiosta $f\colon [-2,1] \to \mathbb{R}$ jolle ylä- ja alasumma S_D ja s_D jaolla $D = \{-2,-1,0,1\}$ ovat erisuuret, ja toinen funktio millä ne ovat yhtä suuret.

2. Todista määritelmän avulla, että funktio

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

   on Riemann-integroituva ja laske $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Todista määritelmän avulla, että funktio

$$f\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{kun } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

   on Riemann-integroituva ja laske $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Olkoon

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kun } x = \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,\ldots, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

   Todista, että f on Riemann-integroituva ja laske $\int_0^1 f(x)dx$.

5. Sanomme, että funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on *rajoitetusti heilahteleva*, jos on olemassa kasvavat funktiot $g,h\colon A \to \mathbb{R}$ siten, että $f = g - h$. Osoita, että funktio on Riemann integroituva jos se on rajoitetusti heilahteleva.

6. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva sekä $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ ja $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. Todista, että

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$