

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 18.1

- (1) Osoita, että  $\mathbb{Q}^n$  on numeroituva.
- (2) Tarkastellaan Euklidista avaruutta  $\mathbb{R}^n$ . Onko totta, että numeroituva yhdiste suljetuista joukoista on suljettu?
- (3) Määritellään metriikka joukossa  $\mathbb{R}^n$  seuraavasti:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jos } x = cy \text{ jollain } c \in \mathbb{R}, \\ |x| + |y|, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Piirrä avoimet pallot  $B(0, 1)$ ,  $B(e_1, 1/2)$ ,  $B(e_1, 1)$  ja  $B(e_1, 2)$ . (Tässä  $e_1$  merkkää ensimmäistä kordinaattivektoria,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .)

- (4) Onko euklidinen pallo  $\{y: |y - 2e_1| < 1\}$  avoin joukko edellisen tehtävän määrittelemässä metrisessä avaruudessa?
- (5) Todista, että jos Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, niin koko jono suppenee.