

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 29.3

- (1) Todista, että Lebesguen mitta on ulkosäännöllinen, eli, että seuraava ominaisuus on voimassa: jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko, niin

$$m_n(E) = \inf_{E \subset A \text{ Avoin}} m_n(A),$$

missä siis infimum otetaan yli joukon E avointen ympäristöjen A .

- (2) * Olkoon $f(x) = |x|\chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$. Laske $\int_{[0,1]} f$.
- (3) Todista Lause 3.8.2 (b), eli, että $\int_E f \leq \int_F f$, kun f on mitallinen funktio joukossa F , ja $E \subset F$ ovat mitallisia.
- (4) * Olkoon f yksinkertainen funktio, jolle $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$ (ei vältämättä normaaliesitys). Todista, että mitalliselle E pätee

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^p c_i m_n(A_i \cap E).$$