Analyysi III, kevät 2006
Loppukoe/rästitentti 15.5

Aikaa 240 min. **Kokeessa saa käyttää apuna kirjallista materiaalia.** Luentomonisteen lauseisiin voi viitata suoraan (paitsi silloin, kun tarkoituksena on todistaa harjoitustehtävänä oleva lause), eli voi kirjoittaa "Lauseen 2.2.1 mukaan, [...]", jne. Muihin lähteisiin ei voi vastauksissa viitata, vaikka niistä saa hakea ideoita.

Samalle arkille voi kirjoittaa useamman tehtävän vastaukset, mutta jokaisessa palautetussa arkissa on syytä olla oma nimi.

Tulokset ilmestyvät kurssin kotisivulle nimellä tai nimimerkillä varustettuna, jos et tätä halua, niin kirjoita se ensimmäisen sivun nimesi viereen.

Vielä ehdit täyttää kurssipalautteen, jos et ole sitä vielä tehnyt. Palautelomake löytyy samoista paikoista kuin harjoitustehtävät, eli toimistoa vastapäätä ja kotisivulla.

(1) Olkoon N normiavaruus. Pisteet $a_1, a_2 \in N$ yhdistävä jana määritellään

$$[a_1, a_2] = \{ ta_1 + (1-t)a_2 \mid t \in [0,1] \}.$$

Joukko $A \subset N$ on konveksi jos $[a_1, a_2] \subset A$ kaikilla $a_1, a_2 \in A$. Osoita, että suljettu yksikköpallo on konveksi.

(2) Osoita, että jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, muttei integroituva, niin ei välttämättä löydy sellaista $\delta > 0$, että $\int_A |f| < 1$ aina kun A on mitallinen joukko jolle $m_1(A) < \delta$.

(3) Tutkitaan avaruutta $M = (\mathbb{R}^n, d_1)$, missä $d_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ määritellään

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

missä, edelleen, z_i on pisteen z koordinaatti numero i. Milloin M on

(a) metrinen avaruus?
(b) normiavaruus?
(c) sisätuloavaruus?
(d) Banach avaruus?
(e) Hilbert avaruus?

(Huom! Ei kannata lähteä joka kohdassa perusperiaatteista, koska silloin vastauksesta tulee pitkä. Esim. jokainen Hilbert avaruus on Banach avaruus, jne.)

(4) Tarkastellaan funktioita $f_k\colon (0,1) \to [0,\infty)$ jotka määritellään

$$f_k(x) = \tfrac{1}{k}x^2 + k^2 x \chi_{[0,1/k]}.$$

Laske

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} f_k \quad \text{ja} \quad \int_{(0,1)} \lim_{k\to\infty} f_k.$$

(5) Olkoon $f, f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Sanotaan, että $f_k \to f$ *mitan mielessä* jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $N > 0$ siten, että

$$m_1\big(\{x \in [0,1] : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}\big) < \epsilon$$

kaikilla $k > N$. Osoita, että jos $f_k \to f$ melkein kaikialla joukossa $[0,1]$, niin $f_k \to f$ mitan mielessä.