Analyysi III, kevät 2006, Loppukoe/rästitentti 15.5

(1) Olkoon N normiavaruus. Pisteet $a_1, a_2 \in N$ yhdistävä jana määritellään

$$[a_1, a_2] = \big\{ ta_1 + (1-t)a_2 \,\big|\, t \in [0,1] \big\}.$$

Joukko $A \subset N$ on konveksi jos $[a_1, a_2] \subset A$ kaikilla $a_1, a_2 \in A$. Osoita, että suljettu yksikköpallo on konveksi.

Vastaus runko: Olkoon B yksikköpallo. Jos $x, y \in B$ ja $z \in [x, y]$ niin $\|z\| = \|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\| \le 1$, jollain t. Siis $z \in B$.

(2) Osoita, että jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, muttei integroituva, niin ei välttämättä löydy sellaista $\delta > 0$, että $\int_A |f| < 1$ aina kun A on mitallinen joukko jolle $m_1(A) < \delta$.

Vastaus runko: Tarkastellaan funktiota $f(x) = x$.

(3) Tutkitaan avaruutta $M = (\mathbb{R}^n, d_1)$, missä $d_1\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ määritellään

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

missä, edelleen, z_i on pisteen z koordinaatti numero i. Milloin M on

(a) metrinen avaruus?
(b) normiavaruus?
(c) sisätuloavaruus?
(d) Banach avaruus?
(e) Hilbert avaruus?

Vastaus runko: Jos $n = 1$, niin M on Hilbertin avaruus, joten myös muut kohdat pätevät. Jos $n \ge 2$, ei M ole sisätulo avaruus (eikä myöskään Hilbert) (tämä todistetaan kuten yksi harjoitustehtävä), mutta kuitenkin Banach.

(4) Tarkastellaan funktioita $f_k\colon (0,1) \to [0, \infty)$ jotka määritellään

$$f_k(x) = \tfrac{1}{k}x^2 + k^2 x \chi_{[0,1/k]}.$$

Laske

$$\lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} f_k \quad \text{ja} \quad \int_{(0,1)} \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Vastaus runko:

$$\int_{(0,1)} f_k = \frac{1}{k} \int_{(0,1)} x^2 + k^2 \int_{(0,1/k)} x = \frac{1}{3k} + \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Toisaalta $f_k \to 0$ kaikkialla, joten tehtävän toinen integraali on nolla.

(5) Olkoon $f, f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Sanotaan, että $f_k \to f$ *mitan mielessä* jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $N > 0$ siten, että

$$m_1\big(\{x \in [0,1] : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}\big) < \epsilon$$

kaikilla $k > N$. Osoita, että jos $f_k \to f$ melkein kaikialla joukossa $[0,1]$, niin $f_k \to f$ mitan mielessä.

Vastaus runko: Väiteen voi todistaa Egoroffin lauseen avulla.