Analyysi III, kevät 2006: Välikoe, 13–15.3

Vastaukset palautetaan kirjallisina 15.3 klo 14:15 mennessä Peterille tai Tomille.

Välikokeet pistemäärä, maks. 20 pistettä, saadaan laskemalla yhteen neljä parasta tehtäväpistemäärää. Huomaa, että eri tehtävistä voi saada eri määrän pisteitä, jotka on ilmoitettu tehtävänumeron perässä.

Koetulokset tulevat kurssinkotisivulle nimellä tai nimimerkillä varustettuna – mikäli et halua tulostasi julki, niin kirjoita tämä nimesi viereen.

Tehtävät:

1. (3 p) Määritellään joukko $H := \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{C} :\ f \text{ on jatkuva}\}$. Osoita, että
$$(f|g) := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}|x|\,dx$$
on sisätulo joukossa H.
2. (3 p) Olkoon $\varrho\colon [0,1] \to (0,\infty)$ jatkuva funktio. Määritellään
$$d(x,y) := d(y,x) := \int_x^y \varrho(z)\,dz,$$
kun $0 \le x < y \le 1$. Osoita, että d on metriikka välillä $[0,1]$.
3. (5 p) Olkoon d metriikka avaruudessa X, ja olkoon $A \subset X$. Todista, että jos $x \in X \setminus A$, niin on olemassa sellainen $a \in A$, että $d(x,A) = d(x,a)$.
4. (5 p) Tutkitaan taas tehtävän 1 joukkoa, $H := \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{C} :\ f \text{ on jatkuva}\}$. Määritellään normi tässä joukossa kaavalla
$$\|f\|_p := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$
kun $1 \le p < \infty$. Osoita, että $(H, \|\cdot\|_p)$ EI ole täydellinen.
5. (7 p) Frechet–Rieszin lauseessa osoitettiin, että $\ell_2^* = \ell_2$ (tarkemmin sanottuna, duaali on isomorfinen avaruuden ℓ_2 kanssa). Osoita, että samassa mielessä pätee $\ell_1^* = \ell_\infty$. Tässä ℓ_p merkkaa avaruutta
$$\ell_p := \big\{(x_i)_{i=1}^\infty :\ x_i \in \mathbb{R}, \|(x_i)\|_p < \infty\big\},$$
missä puolestaan normi määritellään seuraavasti:
$$\|(x_i)\|_p := \begin{cases} \big(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\big)^{1/p}, & \text{kun } 1 \le p < \infty,\\ \sup_i |x_i|, & \text{kun } p = \infty. \end{cases}$$

Yleisohjeet (uudestaan):

- Tehtävien ratkaisemisessa saa käyttää apuna kirjallista materiaalia, tietokoneita, ja muita ihmisiä. Erityisesti siis ongelmia voi ratkoa ryhmissä.
- Kuitenkin jokainen palauttaa tavalliseen tapaan oman, itse kirjoittamansa ratkaisun. Keskeistä on, että kaikki ymmärtävät kirjoittamansa ratkaisut, eikä vaan kopioi niitä.
- Viimeksi mainittua ymmärtämistä tarkastetaan pyytämällä (satunnaisesti valittua) osaa vastaajista selittämään tiettyä ratkaisuaan erikseen sovittuun aikaan.
- Välikokeen aikainen tunti, ti 14.3, ei ole luentoa vaan tavallisessa salissa on "laskupaja" jossa voi työskennellä ryhmissä ja kysyä neuvoa.