OULU Matematiikkavalmennus KEVÄT 2015

(1) Etsi luku, joka täyttää mahdollisimman monta seuraavista ehdoista:

   (a) luku on kaksinumeroinen,
   (b) kaikki numerot ovat parillisia,
   (c) kymmeniä osoittava numero on suurempi kuin ykkösiä osoittava numero,
   (d) mikään numeroista ei ole jaollinen kolmella,
   (e) kymmenien määrä ei ole kaksi kertaa ykkösten määrä,
   (f) luvun numeroiden summa on jaollinen viidellä.

(2) Kumpi luku on suurempi, $2^7 \cdot 5^7$ vai $\dfrac{500^3}{5^3}$?

(3) Mikä on pienin positiivinen kokonaisluku k jolle $2012k$ on kokonaisluvun neliö?

(4) Olkoon n pariton. Osoita että 8 jakaa luvun $n^2 - 1$.

(5) Olkoot a ja b parittomia. Osoita että $a^2 + b^2$ ei ole neliö.

(6) Otetaan mielivaltainen kolminumeroinen luku xyz. Siitä tehdään kuusinumeroinen kirjoittamalla se kahdesti, $xyzxyz$. Teitpä alkuperäisen valinnan miten tahansa, on lopputulos jaollinen seitsemällä. Miksi?

Tarkempi tarkastelu osoittaa, että kuusinumeroinen luku on jaollinen myös luvulla 11. Kuten myös luvulla 13. Mikä tämän selittää?

(7) Mikä on viimeinen numero luvun $2^{3^{2^3}}$ desimaaliesityksessä?

(8) Osoita

   (a) $3 \mid a$ ja $3 \mid b \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid a^2 + b^2$,
   (b) $7 \mid a$ ja $7 \mid b \quad \Leftrightarrow \quad 7 \mid a^2 + b^2$,
   (c) $21 \mid a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 441 \mid a^2 + b^2$.

(9) Osoita, että jos n ei ole alkuluku, niin ei ole myöskään $2^n - 1$.

(10) (a) Olkoot p, $p + 2$ ja $p + 4$ alkulukuja. Osoita että $p = 3$.
   (b) Olkoot p, $4p^2 + 1$ ja $6p^2 + 1$ alkulukuja. Mitä on p?

(11) Millä luvun n arvoilla luku n^2+2 jakaa luvun $2001n+2$?

(12) Osoita, että $720 \mid n^2(n^2+16)$ jokaiselle kokonaisluvulle $n>6$, jolle $n-1$ ja $n+1$ ovat alkulukuja.

(13) Osoita, että $\sum_{k=1}^{100} k^5$ on jaollinen neljällä.

(14) Osoita, että viiden kokonaisluvun joukossa on aina kolme joiden summa on jaollinen kolmella.

(15) Esitä polynomi

$$x^8+x^4+1$$

kahden 4. asteen polynomin tulona.

(16) Olkoon

$$x^n+\left(\frac{1}{x}\right)^n \notin \mathbb{Q},$$

jollakin $n \in \mathbb{Z}_{\geq 100}$. Osoita, että

$$x+\frac{1}{x} \notin \mathbb{Q}.$$

(17) Funktiolle $f(x)$ pätee $f(x-1)=2x^2-3x+1$. Määrää $f(x+1)$.

(18) Polynomin $P(x)$ kertoimet ovat kokonaislukuja ja pätee $P(3)=4$ ja $P(4)=3$. Kuinka monelle kokonaisluvulle x voi olla $P(x)=x$?

(19) Etsi kaikki kokonaisluvut x ja y, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$x^4-12x^2+x^2y^2+30 \leq 0.$$

(20) Määrää kaikki funktiot, jotka on määritelty joukossa $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja jotka toteuttavat ehdon

$$f(x)+8f\left(\frac{1}{x}\right)=-63x$$

aina, kun $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(21) Määrää polynomin

$$a(x)=x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$$

jakojäännös jaettaessa polynomilla

$$b(x)=x^3-x.$$

(22) Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}.$$