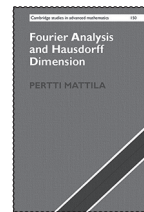


Pertti Mattila: *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 150. Cambridge University Press, 2015. 452 sivua.



## Fourier-analyysin avulla dimensioteorian kimppuun

Ranskalaisen matemaatikon ja fyysikon **Joseph Fourier'n** (1768–1830) mukaan nimetty Fourier-analyysi on jokaiselle vähänkään matematiikkaan ja luonnontieteisiin perehtyneelle tuttu. Saksalaisen matemaatikon **Felix Hausdorffin** (1868–1942) mukaan nimetty Hausdorffin dimensio on puolestaan paitsi geometrisen mittateorian keskeisimpiä käsitteitä, myös modernin matemaattisen analyysin perustyökälu, jonka avulla luonnehditaan erityisesti fraktaalityyppisiä joukkoja, sekä arvioidaan erinäisten poikkeusjoukkojen kokoa. **Pertti Mattilan** kirjoittama odotettu uutuus

”Fourier Analysis and Hausdorff Dimension” käsittelee nimensä mukaisesti Fourier-analyysin ja Hausdorffin dimension erityistä ja osin yllättävää yhteyttä.

Eräs dimensioteorian kulmakivistä on Frostmanin lemmasta energiainegraalien avulla johdettu kapasiteettiluonnehdinta Hausdorffin dimensiolle. Fourier-analyysin käyttökelpoisuus Hausdorffin dimension arvioinnissa perustuu siihen, että nämä energiainegraalit voidaan esittää Fourier’n muunnoksen ja Rieszin ytimien avulla muodossa, joka on usein alkuperäistä käyttökelpoisempi. Tämän huomasi ensimmäisenä **Robert P. Kaufman**, jonka vuonna 1968 esittämää todistusta Marstrandin projektio-lauseelle voidaan pitää yhtenä geometrisen mittateorian ja Fourier-analyysin varhaisimpana yhtymäkohtana. Siitä lähtien Fourier-tekniikat ovat olleet keskeisessä osassa geometrisen mittateorian tutkimusta. Näiden kahden matematiikan osa-alueen rajapinnalla on saavutettu hämmästyttäviä tuloksia ja läpimurtoja, jotka vaikuttavat merkittävästi molempien tutkimusalojen kehitykseen. Kuten teoksen lukija saa havaita, erityisen vilkasta tämä kehitys on ollut viimeisten kahden vuosikymme-

nen aikana.

Mattilan aiempi, vuonna 1995 ilmestynyt ”Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability” on muodostunut fraktaaligeometrian ja geometrisen mittateorian perusteokseksi, joka on myös laajemman matemaattisen analyysin yhteisön tuntema. ”Fourier Analysis and Hausdorff Dimension” jatkaa samalla ja selkeällä suoraan asian ytimeen käyvällä linjalla. Molemmat teokset sisältävät kiinnostavan katsauksen geometrisen mittateorian ytimeen muun muassa projektio- ja leikkauslauseiden sekä Besicovitch-joukkojen käsittelyn kautta. Siinä missä ”Geometry of Sets and Measures” -teoksen punaisena lankana on suoristuvuuden ja suoristumattomuuden käsitteet, ”Fourier Analysis and Hausdorff Dimension” esittelee laajan kirjon Fourier-analyysin sovellutuksia geometrisen mittateorian ongelmiin ja päinvastoin. Teos on jaettu neljään osaan. Ensimmäiset kaksi osaa sisältävät tarvittavat perustiedot dimensioteoriasta ja Fourier-analyysistä sekä aihepiiriltään vaihtelevien fraktaaligeometrian ongelmien käsittelyn tavalla, jossa Fourier-tyyppiset tekniikat yhdistyvät dimensioteoriaan. Muun muassa

etäisyys joukkojen, Cantor-mittojen Fourier’n muunnosten ja näiden yhteyden Pisot’n lukuihin, Bernoulli-konvoluutioiden, sekä Rieszin tulojen käsittelylle on kullekin varattu oma lukunsa. Kaksi jälkimmäistä osaa käsittelevät Fourier-analyysin syvällisempiä sovellutuksia, sekä Fourier’n muunnoksen rajoittumaongelmaa ja Kakeya-tyyppisiä ongelmia.

Paitsi tutkijayhteisöä, kirjoittaja on selvästi ajatellut myös opiskelijoiden ja vasta-alkajien tarpeita. Esitiedoiksi riittää reaalianalyysin ja mittateorian perusteiden hallinta. Kaikki tarpeelliset käsitteet on huolellisesti määritelty, eikä todistuksiin ole jätetty tarpeettomia aukkoja. Liiallinen teknisyyks on kuitenkin onnistuttu välttämään, joten olennaiset ideat ovat hyvin esillä. Teos johdattaa lukijansa ajankohtaisen ja tärkeän tutkimusalan keskeisiin menetelmiin ja tutkimusongelmiin. Uskon kirjan sisällön yhdessä selkeän esitystavan kanssa varmistavan sen, että kirja tulee kulumaan niin opiskelijoiden kuin alan rautaisen ammattilaisten käsissä.

**Ville Suomala**